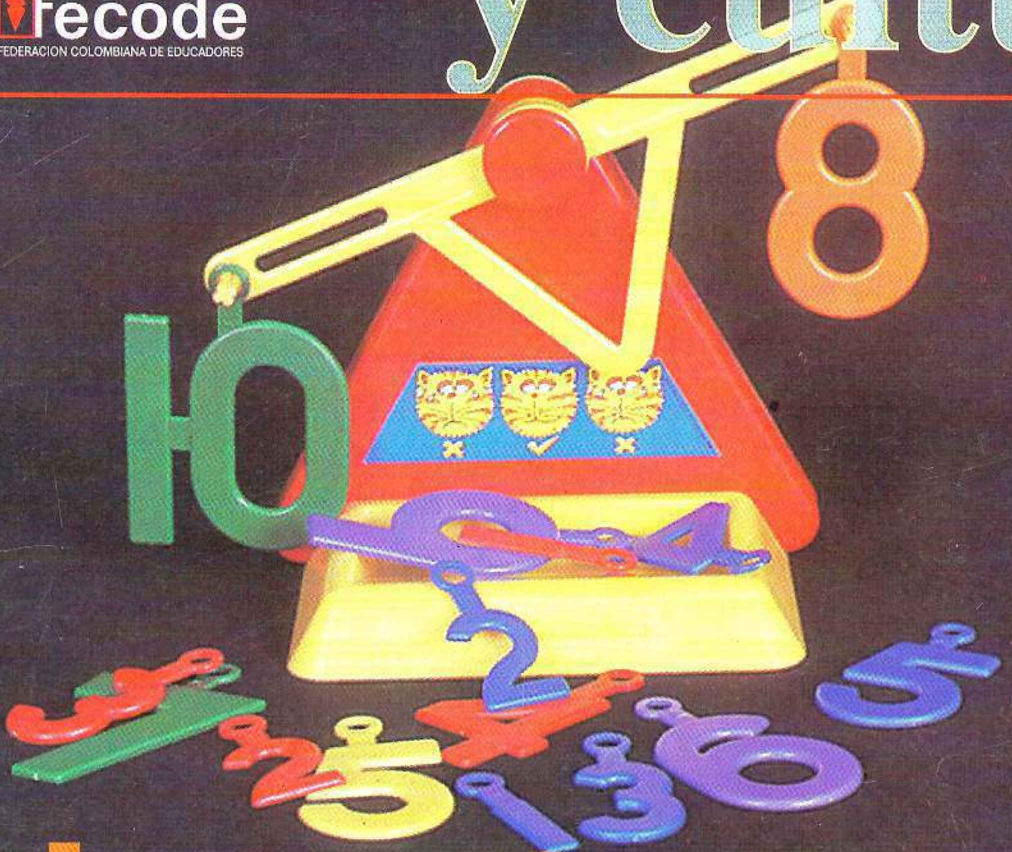
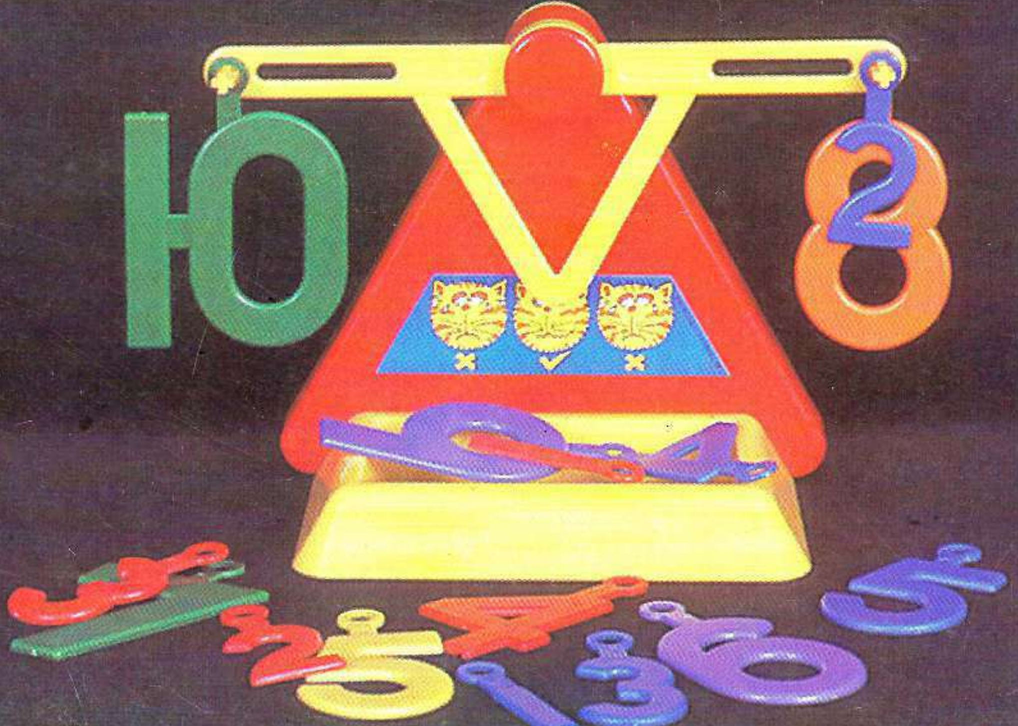
educación y cultura

CEID fecode
FEDERACION COLOMBIANA DE EDUCADORES

40



LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



Santafé de Bogotá, D.C.-Colombia MAYO DE 1996 $2800 Tarifa Postal Reducida Nº 572 ISSN 0120-7164

educación y cultura

Revista trimestral del Centro de Estudios e Investigaciones Docentes de la Federación Colombiana de Educadores (FECODE)

MAYO 1996 No. 40 $ 2.800.oo

Director: Boris Montes de Oca
Consejo Editorial: Alfredo Camelo, Jaime Dussan C., Alvaro Carvajal, Carlos Augusto Hernández, Carlos Higuita, Ricardo Lucio, Germán Mariño, Rafael Rodríguez, Felipe Rojas.
Gerente: Alvaro Carvajal Arias
Carátula: Jhon Brian Cubaque
Ilustraciones: Marco Pinto
Diseño, diagramación y producción editorial: Servigraphic Ltda.
Corrección: Víctor Casas

NUEVA DIRECCION
Distribución y suscripciones:
Cra. 13A No. 34-36
Teléfono: 2458155 Fax: 2454433
A. A. 14373 Santafé de Bogotá

Las colaboraciones se pueden enviar a: Comité Editorial, EDUCACION Y CULTURA **Cra. 13A No. 34-36** o al apartado aéreo 14373 Santafé de Bogotá.
Tiraje de esta edición: 30.000 ejemplares

Distribuidores y puntos de venta en el país

Apartadó
Víctor Z. Merluck
Cra. 96 Nº 91-15
Tel.: 282401

Arauca
ASEDAR
Calle 19 Nº 22-74
Tel.: 52516

Yolanda Mariño
Calle 22 Nº 17-39
Tels.: 52690 - 52317

Armenia
SUTEQ
Martha Cardona
Cra. 13 Nº 9-43
Tel.: 458431

Barranquilla
Gil Guerrero
Cra. 13B Nº 45E-31
Tel.: 471023

Javier Enrique Ramos
Cra. 31 Nº 68B-21
Tel.: 584569

Jairo Moisés Marriaga
Calle 47B Nº 21C-35
Tel.: 363232

Bucaramanga
SES Cra. 25 Nº 30-55
Tel.: 341827

Germán Chapeta
Librería Prolectura
Cra. 27 Nº 12-28
Tels.: 345087 - 455697

Doris C. Vega Q.
Calle 64A Nº 8C-09
B. Almendros
Tels.: 447481 - 341827

Cali
SUTEV
Calle 8 Nº 8-85
Tel.: 801008

Armando Gil. P.
Calle 5 Nº 24A-09

Caramanta
María E. Alvarez B.
I.D.E.M. Juan P. Gómez
La Mansión Villanueva
Cra. 42 Nº 64-59
Tel.: 674362

Cartagena
Ismael Ortega Arrieta
Barrio Santa Lucía
Conjunto Residencial
Santa Lucía Apto. 301
Tel.: 6631326

Manuel Mendivil C.
Calle del Cuartel Nº 36-32
Tel.: 642551

Cereté
Manuel Ramón Pérez
Calle 11 Cra. 11A Esquina
Nº 11-08
Tel.: 747715

Ciénaga
Cecilia Mozo
Cra. 20 Nº 8-31
Tel.: 241177

Cúcuta
Luis David Jaimes
Avda. 6 Nº 15-39
Tel.: 723384

Chiquinquirá
Hilba Marina Gayón
Calle 6 Nº 7-40

Dosquebradas
Sigifredo Flórez V.
Cra. 15A Nº 61-15
Tel.: 322161

Duitama
Carlos Darío Rojas
Cra. 11 Nº 15-81
Tel.: 602881

Florencia
AICA Cra. 8 Nº 6-58 B.
Estrella
Tel.: (98835) 2662

Garzón
Alejandro Mario Solarte
Cra. 3 Nº 7-18 Nazareth
Tel.: 3703

Ibagué
SIMATOL Avda. 37 Cra. 4
Casa del Educador
Tel.: 651889

Ramiro Gavilán Borrero
Cra. 10 Nº 39-90 B. Gaitán
Tel.: 653288

Leticia
Jorge E. Picón Acuña
Calle 12 Nº 10-20

Líbano
Carlos Alberto Reyes C.
Calle 1ª B Nº 3A-17
Tel.: 565011

Manizales
EDUCAL
Calle 18 Nº 23-42
Tel.: 827771 - 828811

José Darío López S.
Calle 27 Nº 32-03
Centro Educativo Andrés
Bello
Tel.: 833893

Piedad Graciela Dulce
Cra. 25 Nº 55B-150 INEM
Tel.: 855598 ext. 28

Medellín
ADIDA Calle 57 Nº 43-27
Tel.: 540931

Tiberio Castaño
Calle 57 Nº 42-60
Tel.: 2847246

Luis Felipe Ibarra
Cra. 58B Nº 47-09
Tel.: 4513880

Alfredo Aguirre
Calle 98C Nº 37-09
Tel.: 5213099

Fermín Chavarriaga
Calle 104 EE Nº 83GG-18

Mitú
Gentil Novoa Garzón
Col. Comercial Noc.
Tel.: 42045

Mocoa
José Félix Bernal
Cra. 4 Nº 7-23
Tel.: (988) 395140

Montería
Eida Tobías Argel
Calle 36 Nº 5-63
Tel.: 825307

Neiva
Alfonso Llanos Durán
Calle 49F Nº 6-29
Condominio Capri
Tel.: 152230

Oswald Campos
Cra. 1ª B W Nº 64-35
Tels.: 721106 - 729614
Cra. 8 Nº 5-04

Ocaña
ASINORT
Libardo Alfonso Solano
Calle 12 Nº 9-51 B. El
Carretero
Tels.: 622565 - 622567

Pasto
Myriam Erazo Enríquez
Cra. 24 Nº 22A-61
Tel.: 230308

Pereira
Gustavo Betancur
Cra. 11 Nº 27-34
Tel.: 360815

Librería El Nuevo Libro
Cra. 4 Nº 19-09
Tel.: 332688

Pivijay
Hugo de Jesús Quiñones
Calle 12 Nº 17-50
Tel.: 259032

Plato
Servicio Baldovine
Calle 9 Nº 9A-58
Tel.: 850297

Popayán
Edgar Gregorio Meneses
Calle 7 Nº 7-26
Tels.: 244159 - 240079

Quibdó
Feliciano Chaverra
Calle30 Nº9-23
Tel.: 71176

Yenfa Omary Ledesma
Cra. 16 Nº 26-54 Int. B-4
Urbanización la Cohimbra
Tel.: 712264

Risaralda
Alexander Valencia
Cra. 3 Nº 3-03
Tel.: 57105

Rovira
Marco F. Villarreal
Cra. 5 Nº 2-30

San Andrés Islas
Rafael D. León
A.A. 1646
Tel.: 23829

San José del Guaviare
Enar A. Castro
ADEG

San Pedro de los Milagros
Guillermo León Betancur
Escuela Gabriel González
Tel.: 267201

Santafé de Bogotá
ADE
Cra. 9 Nº 2-45 Sur
Tel.: 890266

Coop. Editorial del Magist.
Cra. 19 Nº 37-65
Tel.: 452881

ECOE
Calle 32 Nº 17-22
Tels.: 2882556 - 889871/21

Henry Sarabia Angarita
Calle 63 Nº 81A-54
Tel.: 2527460

Cír. de Lec. Alternativa
Cra. 8ª Nº 15-63 L. 235
Tel.: 844582

Librería Educativa
Magisterio
Cra. 19 Nº 37-78
Tel.: 2453277

Librería Gran Colombia
Calle 18 Nº 6-30
Tel.: 3411755

Librería Viva
Calle 18 Nº 6-16
Tel.: 2824225

Víctor Beltrán y Rafael
Beltrán
Calle 76Bis Nº 110-47
Int. 26
Tel.: 4354017

Rodrigo García
Cra. 19 Nº 37-78
Tel.: 2453277

Santa Marta
EDUMAG
César Osorio
Cra. 22 Nº 15-10 B. Jazmín
Tel.: 202591

Sibundoy-Putumayo
José Hernando Sosa
B. Castelvi
Tel.: 260222

Sincelejo
Roberto Estrada
Calle 30 Nº 17A-24
Tel.: 820352

Tunja
SINDIMAESTROS
Cra. 10 Nº 16-47
Tels.: 422771 - 422055

Túquerres
Alvaro C. Benavides
Calle 23 Nº 21-36
Tel.: 280870

Ubaté
Juan José Cubillos
Grupo Pedagógico Ubaté
Cra. 7ª Nº 10-73
Tels.: 2060 - 3059

Valledupar
ADUCESAR
Calle 16A Nº 19-75
Tel.: 725016

Janner Freyle Nieves
Manz. 2 Casa Nº 26 B.
Sicarare
Tel.: 722988

Villavicencio
José Sepúlveda
Cra. 26 Nº 35-09

Stella Vanegas A.
Cra. 59 Nº 44-13
Tel.: 33824

ADEM
José Fernando Román
Tel.: 624551

Yarumal
Javier J. Rodríguez
Cra. 17 Nº 21-43
Tel.: 870269

Yopal
SIMAC
Luis Eduardo Correa
Tels.: 558309 - 558592

Los maestros, directivos y demás personas interesadas en la venta de la Revista **Educación y Cultura** favor comunicarse al teléfono 2696919 Avda. 28 Nº 36-07 Santafé de Bogotá, D.C.

La enseñanza de las matemáticas

En educación existen dos extremos tan difundidos como equívocos: el primero se podría denominar una pedagogía sin didáctica, y el segundo, su opuesto, una didáctica sin pedagogía. La pedagogía sin didáctica se expresa en una perspectiva cuya preocupación fundamental gira en torno a los para qué —fines políticos— y los entornos sociológicos y económicos donde se inscribe la acción educativa, dejando de lado, por negación o subestimación, los cómo específicos, es decir, las metodologías y didácticas.

La didáctica sin pedagogía se centra en los cómo, cayendo en la ilusión de la existencia de una neutralidad valorativa y epistemológica de los procedimientos y las técnicas, desdeñando, por sobrepolitizada, cualquier reflexión sobre los intereses y los contextos de la educación.

Ciertamente ninguno de los dos "ismos" señalados, pedagogicismo y didactismo, permiten transformar los análisis y las prácticas pedagógicas. Ambos, por ser unilaterales, terminan empobreciendo las posibilidades de comprender de manera integral la realidad educativa. Al revisar los índices de la revista ***Educación y Cultura*** *queda claro que ésta ha procurado mantener, a lo largo de su labor editorial, una posición ecuánime frente al tópico señalado, lo que no implica que haya sido uniforme.*

Señalar los riesgos del pedagogicismo y el didactismo de ninguna manera significa desconocer o minimizar la importante contribución realizada por investigadores educativos en su empeño de rescatar la pedagogía como disciplina, como saber y como práctica. Fue un rescate y un enfasis necesario del cual se nutrió el Movimiento Pedagógico y que, sin duda, ha contribuido a la comprensión y esclarecimiento de los problemas centrales de la educación en nuestro país

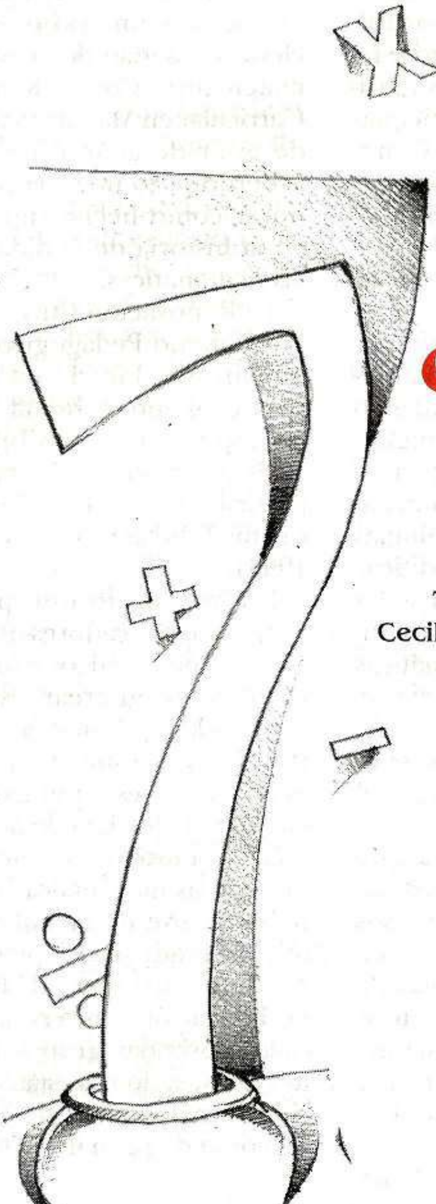
Para alcanzar la reforma de la educación, propósito central de la Ley General de Educación y del Movimiento Pedagógico, es necesario adelantar una profunda reforma de la enseñanza y de los actuales planes y programas de estudio. El ejercicio de la autonomía escolar hace obligatorio que el magisterio colombiano *dedique sus mejores esfuerzos a la tarea de reestructurar los planes de estudio, establecer las áreas prioritarias de enseñanza, transformar los métodos de enseñanza y los sistemas de evaluación. Ello demanda investigación, innovaciones educativas, trabajo pedagógico en equipo y, por supuesto, debate público e intercambio de experiencias. Este es el espítiru que anima la presente y futuras ediciones de* **Educación y Cultura.**

Este número, referido específicamente a la Educación Matemática, desea ubicarse nuevamente en un lugar donde tenga cabida tanto lo didáctico como lo pedagógico. Además, posee dos características: la de ser monográfico y la de trabajar sobre matemáticas.

Es significativo anotar que en toda su historia, **Educación y Cultura** *no había dedicado una edición de manera exclusiva al tema de la enseñanza de la matemática, sólo algunos artículos presentados a los dos Congresos Pedagógicos, en contraste con la mayor divulgación dada a artículos de otras áreas de enseñanza. Comenzar a llenar este vacío parcial, es importante no sólo porque las matemáticas son uno de los ejes fundamentales de la formación sino porque hay que contribuir "quitando el miedo"que muchos educadores le tienen a las matemáticas, en buena media generado por prácticas pedagógicas inadecuadas.*

De otra parte, aunque la revista siempre se ha estructurado sobre un tema central, este número es el primero completamente monográfico, que intenta explorar su acogida y pertinencia, pero que de ninguna manera sustituye la versatilidad de una revista con diferentes secciones, la cual continuará guiando la mayor parte de los próximos números.

Finalmente, habría que decir que recogiendo la tradición de la revista, este número incluye artículos para una gama amplia de educadores, desde preescolar hasta secundaria, y hace énfasis en la descripción de investigaciones y experiencias, con el fin de contribuir a alentar innovaciones en el aula de clase que se traduzcan en transformaciones en los contenidos y métodos de enseñanza de las matemáticas.



La renovación curricular en matemáticas: algo está In

Teresa León Pereira, Cecilia Casasbuenas Santamaría, Cecilia Castiblanco de Izquierdo, Virginia Cifuentes de Buriticá, integrantes del Grupo de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional.

La Renovación Curricular y el Movimiento Pedagógico que se dinamizó y floreció en el decenio de los años ochenta, crearon un espacio que hizo posible dos años de debate para construir participativamente la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994). Ese escenario que presenta grupos de educadores-matemáticos y de matemáticos-educadores interesados en crear, estudiar y desarrollar propuestas sobre currículo así como intercambiar experiencias, es el punto de partida para el ejercicio de la autonomía en asuntos pedagógicos. En el caso de matemáticas ese escenario incluye un auténtico movimiento académico y pedagógico en el que participan: Ministerio de Educación, universidades oficiales y privadas, grupos de maestros investigadores y establecimientos educativos tanto de secundaria como de primaria. Quien desee trabajar la pedagogía de las matemáticas no está solo.

Todo el conocimiento y, en especial, el lógico-matemático se deriva, en primera instancia, de las acciones humanas sobre el mundo[1].

1. Un punto de partida

El debate sobre matematicas: un hecho cultural.

En muchos países se están llevando a cabo reformas educativas que proponen robustecer la autonomía de las comunidades educativas como una de las estrategias para mejorar la calidad de la educación.

Los factores que contribuyeron a tomar la decisión de promover el ejercicio de la autonomía escolar son múltiples y merecen un estudio y análisis especiales[2] que están más allá de los propósitos de este artículo pero que, seguramente, incluirá problemas relacionados con el bajo rendimiento de muchos estudiantes, ineficacia e irrelevancia de lo que se aprende, escepticismo frente a los beneficios de las reformas educativas, carencia de materiales didácticos y mucho más.

En el fondo hay una crisis de validez de la educación escolar, tal como se venía desarrollando, e interrogantes sobre la misión de las instituciones educativas ahora y hacia al futuro. Es posible argumentar, también, que los múltiples cambios que se suceden vertiginosamente en diferentes puntos del planeta han transformado de tal manera la vida humana y sus posibilidades de desarrollo que gran parte de las prácticas escolares resultan obsoletas[3].

El conocimiento de esa realidad, por parte de ciertos grupos de educadores, genera procesos de búsqueda de caminos pedagógicos alternos y de nuevas construcciones curriculares. Por fortuna, para Colombia, siempre ha habido en el país personas y grupos con capacidad de anticiparse al momento en que viven y siempre hemos tenido pioneros de ideas pedagógicas. El aprendizaje de las matemáticas ha sido un campo rico en ideas, propuestas y debates. Si nos ubicamos en los años cincuenta encontramos a uno de los estudiosos más connotados del país, el maestro Carlo Federici Casa preguntando y escribiendo sobre la lógica, la aritmética y la geometría; buscando y proponiendo metodologías y procedimientos para codificar y decodificar los lenguajes de las matemáticas; discutiendo el contenido y, también, las gramáticas de sus representaciones y expresiones pero, ante todo, creando una escuela de metodología para el desarrollo de la ciencia y el pensamiento.

Por eso no nos extraña que desde hace más de 20 años sus alumnos, ubicados en diversos puntos de la geografía nacional, estén generando sus propias escuelas. Alguna raíz tienen en su obra las sociedades nacional y departamentales de matemáticas y física, los coloquios, simposios, congresos, las investigaciones e innovaciones en didáctica de las matemáticas, los grupos de estudio de maestros y las especializaciones, maestrías y doctorados que ofrecen las universidades.

Eso explica, parcialmente al menos, por qué la propuesta de currículo de matemáticas contenida en la Renovación Curricular cayó en tierra abonada para el debate académico. Dicho currículo, que fue construido bajo la orientación de otro matemático e investigador excepcional, el maestro Carlos Eduardo Vasco Uribe, ha constituido durante todos estos años, sin lugar a dudas, un interrogante, una invitación y una propuesta para elevar la calidad de la educación matemática. Con la Renovación Curricular en Matemáticas se puede estar de acuerdo o en desacuerdo pero no se la puede ignorar como hecho significativo en la historia de la didáctica de las matemáticas.

La Renovación Curricular y el Movimiento Pedagógico, que se dinamizó y floreció en el decenio de los años ochenta, crearon un espacio que posibilitó dos años de debate para construir participativamente la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994).

Ese escenario que presenta grupos de educadores-matemáticos y de matemáticos-educadores interesados en crear, estudiar y desarrollar propuestas sobre currículo, así como intercambiar experiencias, es el punto de partida para el ejercicio de la autonomía en asuntos pedagógicos. En el caso de las matemáticas ese escenario incluye un auténtico movimiento académico y pedagógico en el que participan: el Ministerio de Educación, universidades oficiales y privadas, grupos de maestros investigadores y establecimientos educativos tanto de secundaria como de primaria. Quien de-

---

1. Esta es una de las ideas centrales de la teoría Piaget. Se puede consultar a Howard Gardner en su obra *Estructuras de la Mente,* cuando analiza la inteligencia lógico-matemática. También a Carlos E. Vasco U. en su obra sobre los Sistemas Métricos.

2. El Ministerio de Educación hace una aproximación a este análisis en su documento sobre Lineamientos Generales de Procesos Curriculares.

3. Los informes de investigaciones recientes como la que lleva el nombre de *Atlántida* tienen mucha información al respecto.

see trabajar la pedagogía de las matemáticas no está solo.

La lista es larga pero faltan muchos más.

Si bien hay ya una larga lista de los creadores y pioneros de una forma de ser que escudriña los secretos de la educación matemática también es justo reconocer que hay muchos educadores que ni siquiera se han enterado de que, hoy como ayer, las preguntas por la necesidad, la utilidad y la forma de aprender matemáticas están vigentes. Es urgente que todos seamos conscientes de que nunca se termina de aprender cómo se aprenden y enseñan las matemáticas y que los currículos, como las metodologías, son transitorios.

El debate acerca de la educación matemática debe ser contagioso. Los estudiantes, los padres y madres de familia, los egresados de los establecimientos educativos deben entrar en la onda y expresar sus inquietudes, sus preguntas, ojalá aquellas que han guardado durante tantos años. Las preguntas abren el debate y es, entonces, cuando se pueden exponer las respuestas que cada uno considera como las más acertadas. La necesidad de argumentar las diferentes posiciones y de establecer consenso en torno de los mejores argumentos lleva a los interesados a estudiar, a intercambiar experiencias y a comprometerse en proyectos de investigación peda-gógica. Uno de los grandes logros de la descentralización curricular sería la de conseguir que la búsqueda de conocimientos sobre el aprendizaje de las matemáticas sea lo in mientras que la creencia de que ya sabemos enseñar quede out.

2. Sobre lo que esta In

Algo básico en el ejercicio de la autonomía es saber qué hay que hacer, para qué, por qué, cómo y cuándo se hace. Eso es perfectamente aplicable a la educación matemática. El interés que tengan quienes están haciendo currículo para buscar respuestas adecuadas y pertinentes será un factor decisivo en la calidad de la educación. Eso está in.

Está In tener unos fundamentos o bases conceptuales

Cada maestro necesita explicitar las ideas fuertes que orientan su trabajo: su visión y sus creencias en relación con los estudiantes, con el aprendizaje, con las matemáticas, con su papel y con el de la institución educativa.

El Marco General de Matemáticas[4] contiene:

a) una justificación de las matemáticas en el currículo escolar,

b) una forma de percibir a los estudiantes,

c) una visión de la construcción de las ideas matemáticas,

d) una propuesta metodológica para aprender matemáticas.

a) La motivación por el estudio de las matemáticas está cada vez más de moda, está in. Qué

4. La versión más actualizada que se ha publicado es de 1991 y precede a la propuesta curricular de 9º grado.

bien que sea así. Quienes nos pregunta, para qué estudiar matemáticas nos dan la oportunidad de analizar que algunas personas las estudian para saber resolver problemas de cuentas en el mercado o en la economía doméstica; otras las aprenden porque aspiran a manejar la economía de una empresa o del país; otros para conocer un lenguaje que les ayude a entender el mundo y algunos estudian matemáticas para hacer ciencia. Pero lo más interesante es que el aprendizaje gozoso de las matemáticas es un ejercicio extraordinario para engendrar, cultivar y desarrollar la lógica, el pensamiento coherente y estéticamente ordenado, la capacidad de abstracción y, por consiguiente, el desarrollo de las características propias de las personas[5]. Hacia ese propósito están orientados el marco general y los programas de matemáticas de la Renovación Curricular. Esa tendencia hacia un nivel superior del desarrollo humano está vigente y los materiales curriculares pueden ayudar a los maestros para que logren nuevos avances.

b) Los estudiantes pueden ser percibidos como capaces de participar activamente en el proceso de aprendizaje. Lo que muchas veces no saben ellos es por qué tienen que aprender ciertos temas y desarrollar determinadas tareas.

En ese caso lo que necesitan es encontrar y entender las razones por las cuales en las clases se les propone aprender cosas que ellos no están preguntando. La escuela debe ayudarles a encontrar esas razones porque con ello la educación matemática va siendo, cada vez más, un proceso intencional y autogestionado. Por regla general, cuando una persona comprende que las inteligencias[6] necesitan ser cultivadas, acepta los ejercicios que le proponen para ello o se inventa otros más desafiantes. La propuesta de la Renovación Curricular propende por el cultivo de la motivación interior. Por eso sugiere actividades que emplean materiales que pueden ganar el interés de los estudiantes para asumir preguntas y problemas intelectualmente desa- fiantes y para disfrutar el placer de construir respuestas y descubrir soluciones.

c) La visión que tengamos sobre la construcción de las ideas matemáticas influye en la forma como se organizan y desarrollan el currículo y los programas. En la versión 1991 del Marco General se explicitan gráficamente algunas relaciones básicas entre sistemas matemáticos. Ellos complementan las pautas para apropiarse de las ideas, enriquecerlas y tener una base común para un currículo de matemáticas que propicie la construcción de los sistemas conceptuales en la mente de los estudiantes.

Los conceptos se construyen en el transcurso de los años en unos procesos dialécticos que muchas veces producen verdaderos conflictos. Por ejemplo, en la primaria se aprende a trabajar con los números naturales, se les reconoce, se les ordena y se hacen operaciones entre ellos. En secundaria se debe aprender a trabajar con otros números, con los enteros, por ejemplo. Todos conocemos las dificultades —las "tragedias"— que se presentan en clase con las operaciones elementales en sistemas formados con números enteros. Una de las causas es que los conceptos, reglas y propiedades que la mayoría de las personas deduce del trabajo con números naturales (que la adición y la multiplicación son operaciones que "aumentan", que la sustracción "disminuye") no se cumplen cuando se trabaja con números enteros.

Todos los educadores estamos invitados a proponer currículos de matemáticas para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes. La Ley General de Educación establece una base orientadora para todo el país. En los fines de la Educación, en los objetivos para los niveles y ciclos está ordenado que busquemos el desarrollo de los procesos mentales y que asumamos el enfoque de sistemas para el área de matemáticas. Podemos decir que los avances logrados durante todos estos años están In.

5. Al respecto uno de los autores que hemos consultado es Lev. S. Vygotsky en su obra Desarrollo de Procesos Psicológicos Superiores.

6. La reflexión sobre las múltiples inteligencias fue introducida en el Ministerio de Educación por Carlos E. Vasco U. desde 1988 con una conferencia titulada la "Reconceptualización de las inteligencias", conferencia basada en la teoría de las Estructuras de la mente de H. Gardner, que fue publicada en la Serie *Pedagogía y Currículo* en el número dedicado a Desarrollo Procesos de Pensamiento.

Para evitar este tipo de conflictos y por diversas razones didácticas y científicas la Renovación Curricular propone un enfoque de **Procesos y Sistemas** para el Currículo de Matemáticas[7].

Se procura —y se espera— que los docentes tengan en cuenta, por una parte, que desde el preescolar están trabajando con sistemas[8] en cada actividad que desarrollan y, por otra, que los conocimientos no son terminales, que en cada grado, al trabajar nuevos sistemas hay que "reventar" los conceptos para poder seguir aprendiendo. Si fuéramos conscientes de esta realidad no le diríamos a los niños de segundo de primaria tú ya sabes sumar. Esa frase está incompleta y comunica una idea errónea. Es más conveniente decir: tú ya sabes contar naranjas y niños y sabes sumar números naturales, números de contar. El hecho de especificar qué es lo que ya sabe sumar deja abierta la expectativa —así sea en forma inconsciente— de que le quedan otros tipos de sumas por aprender. Tenemos la conjetura de que ello facilitaría el aprendizaje de la adición de números racionales, de funciones, de matrices y de vectores, entre otros.

El enfoque de procesos y sistemas facilitaría a lo largo de la Educación Básica la organización mental de los conocimientos adquiridos por los estudiantes y, además, el reconocimiento y la comprensión progresiva de las estructuras matemáticas antes que la repetición memorística de definiciones que no garantizan la existencia de conocimientos relacionados en el cerebro. Ayudaría a desarrollar la capacidad de reconocer lo que tienen en común varios sistemas, la capacidad de abstraer un modelo común y de olvidarse de lo particular de los ejemplos y las definiciones[9].

d) **La metodología propuesta por la Renovación Curricular en Matemáticas se apoya en principios de psicología cognitiva, de la pedagogía constructivista y del enfoque de procesos y sistemas,** los cuales justiprecian la potencia de los algoritmos como herramienta matemática. Una de las ideas fuertes es que las personas aprendemos matemáticas a partir de los análisis que hacemos acerca de las acciones que realizamos con los objetos, respecto de las relaciones entre esas acciones, con relación a las declaraciones que podemos hacer respecto de las acciones —reales y posibles— y acerca de las relaciones entre las declaraciones que hacemos.

Por eso, dentro del enfoque de Procesos y Sistemas partimos de los sistemas concretos que son como especie de talleres donde se fragua el sistema conceptual que luego podemos expresar mediante diversos sistemas simbólicos. Partir de sistemas concretos significa que el tratamiento de un tema o un problema toma como base aquellos objetos (algunos son manipulables físicamente y otros no), transformaciones y relaciones que son ya conocidas en alguna forma por quienes aprenden. Para un sistema conceptual es posible encontrar varios sistemas concretos y varios sistemas simbólicos. Trabajar con varios sistemas concretos permite descubrir lo que hay de común en ellos. A propósito decía Alfred

---

7. Este enfoque ha evolucionado desde versiones que enfatizan el aspecto de los sistemas hasta la más reciente que incluye explícitamente lo trabajado sobre los procesos. Esa evolución puede apreciarse analizando el capítulo correspondiente a matemáticas en el "libro amarillo" de los marcos Generales de las Matemáticas, después la versión del marco de 1991 y finalmente la Teoría General de Procesos elaborada por Carlos E. Vasco U. y varios investigadores dentro de los trabajos de la Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo.

8. Esta idea se encuentra ampliamente ilustrada en la conferencia Sistema y Estructura de Carlos E. Vasco U. publicada por Editorial Norma en un documento titulado El Enfoque de Sistemas en la enseñanza de las Matemáticas.

9. Al respecto Carlos E. Vasco U. considera que el paso de los objetos a las estructuras sería un rasgo característico de las matemáticas del siglo XX como diferentes de las anteriores. Ver la conferencia titulada Conjuntos, Estructuras y Sistemas.

North Whitehad: *el primer hombre que observó la analogía entre un grupo de siete peces y un grupo del pensamiento?. Fue el primer hombre que concibió un concepto que pertenecía a la ciencia de las matemáticas puras*[10].

Cuando descubre analogías entre diversas transformaciones u operaciones puede llegar a concluir que en situaciones aparentemente diferentes e inconexas hay algo que es lo mismo. Esa percepción le permite construir conceptos y abrir el "archivo" del sistema conceptual para introducir nuevos conceptos, afinarlos, establecer relaciones entre ellos, reemplazar unos por otros o descubrir vacíos en su "enciclopedia mental". Surge la necesidad de expresar, por escrito o por medio de gráficos, de conos o de fórmulas, eso que se ha elaborado en la mente. Para ello se inventan y se usan los sistemas simbólicos.

Ese recorrido por lo concreto, lo conceptual y lo simbólico tiene que ser vivido, protagonizado, gestionado y disfrutado por cada estudiante.

La propuesta metodológica de la Renovación Curricular incluye otra herramienta didáctica poderosa: el enfoque de operadores. Se busca que el aprendizaje de las matemáticas se realice dentro de un ambiente en el cual la actividad lúdica mental se cultiva, se desarrolla conscientemente y se analiza gozosamente. Dentro de ese enfoque, por ejemplo, la acción de duplicar un número se asume como una transformación en la cual hay un operador que es el 2, hay un número al cual se aplica y hay alguien que realiza la operación y produce el resultado, es quien aprende. Este enfoque lleva a comprender el carácter activo de las operaciones y a tomar conciencia de la necesidad y los frutos de la actividad mental.

El enfoque de procesos y sistemas facilitaría a lo largo de la Educación Básica la organización mental de los conocimientos adquiridos por los estudiantes además, el reconocimiento y la comprensión progresiva de las estructuras matemáticas antes que la repetición memorística de definiciones que no garantizan la existencia de conocimientos relacionados en el cerebro.

Esta In construir propuestas pedagógicas

Todos los educadores estamos invitados a proponer currículos de matemáticas para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes. La Ley General de Educación establece una base orientadora para todo el país. En los fines de la Educación, en los objetivos para los niveles y ciclos está ordenado que busquemos el desarrollo de los procesos mentales y que asumamos el enfoque de sistemas para el área de matemáticas[11]. Podemos decir que los avances logrados durante todos estos años están in.

Está In debatir las propuestas

El ejercicio de la autonomía en asuntos pedagógicos requiere un trabajo cooperativo para el cual es necesario divulgar las propuestas curriculares que haya, estudiarlas, intercambiar experiencias, aprender a debatir las ideas y a reconocer lo valioso de cada una para llegar a un acuerdo sobre aquellas que, desde el punto de vista científico y didáctico, resultan más adecuadas.

3. Una oportunidad y un desafio

Los análisis de las tendencias mundiales en asuntos curriculares señalan que hay corrientes encontradas: unas buscan la internacionalización de los currículos básicos y otras buscan la atención a los asuntos locales. Colombia no es ajena a esa discusión ni a la realidad que la origina.

La coyuntura pedagógica que vivimos nos brinda una magnífica oportunidad para que todos los docentes aprendamos a hacer currículos pertinentes, elaborados participativamente con los aportes de las familias.

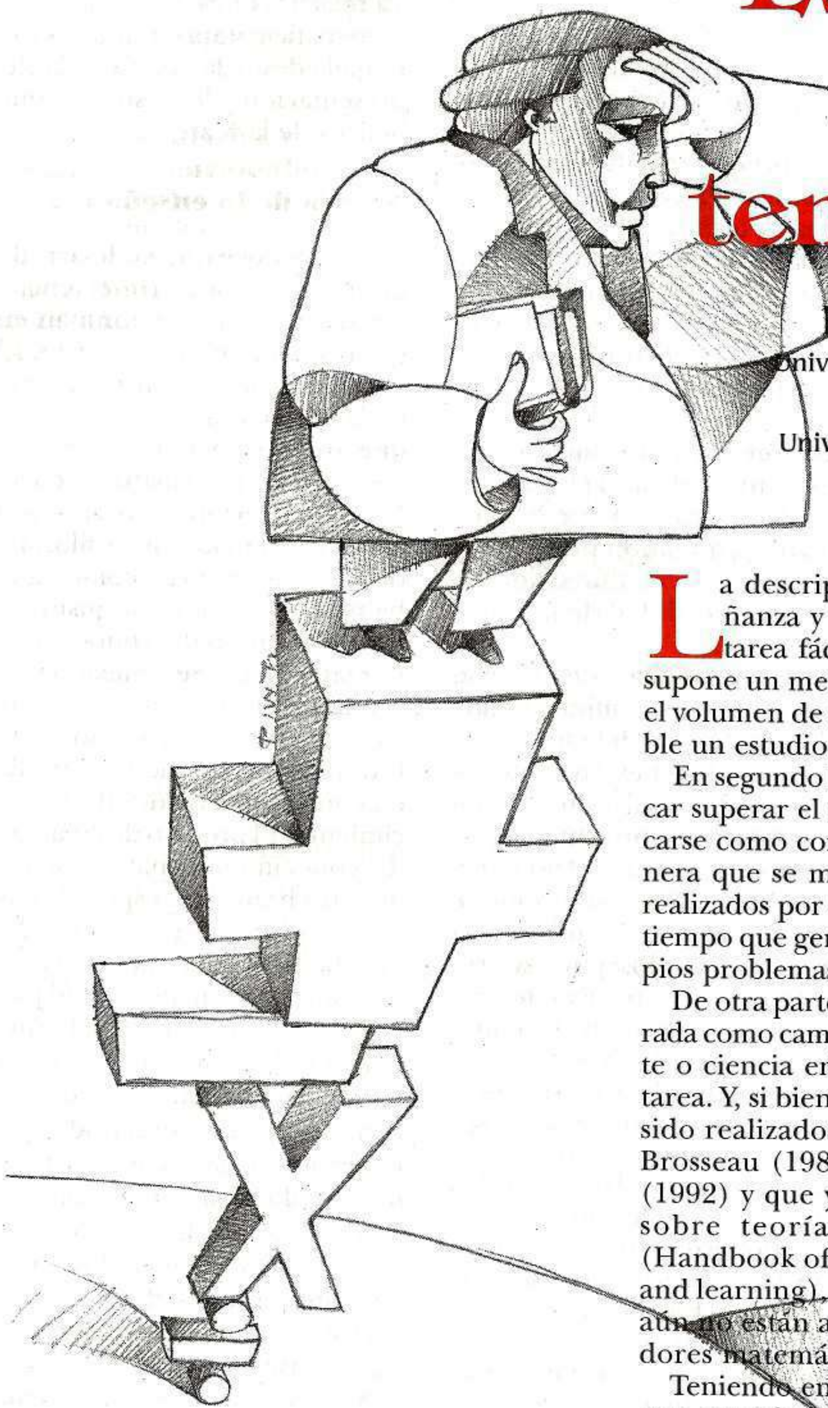
Tenemos la oportunidad de aprender mucho sobre Procesos y Sistemas; la oportunidad de conocer a fondo la propuesta de la Renovación Curricular y de tomarla como fuente de ideas. Pero también tenemos el desafío de ir más allá de lo que ella propone, el desafío de superarla ❑

10. Esta cita se encuentra en la obra de Howard Gardner titulada Estructuras de la mente en la pág. 167 de la segunda edición publicada por el Fondo de Cultura Económica en 1993.

11. Ver lo que propone la Ley General de Educación en los artículos 5, 20, 21, 22, 23.

Panorama de la educación matemática

Escuelas y tendencias



Myriam Acevedo
Universidad Nacional de Colombia
Gloria García
Universidad Pedagógica Nacional

La descripción de las tendencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no es tarea fácil. No lo es, en primer lugar, porque supone un metaestudio del campo intelectual en sí y el volumen de publicaciones en éste hace casi imposible un estudio exhaustivo.

En segundo lugar, porque su clasificación debe buscar superar el carácter puramente informativo y ubicarse como contribución para la reflexión de tal manera que se motive a profundizar sobre los aportes realizados por la comunidad internacional, al mismo tiempo que genere preguntas a la luz de nuestros propios problemas.

De otra parte, la Educación Matemática es considerada como campo de investigación científico-emergente o ciencia en constitución, esto complejiza más la tarea. Y, si bien es cierto que estudios profundos han sido realizados por investigadores de la talla de G. Brosseau (1989), J. Kilpatrick, (1992) y J. Godino (1992) y que ya existen publicaciones sistemáticas sobre teorías resultado de la investigación (Handbook of Research on Mathematics. Teaching and learning), también es cierto que en nuestro país aún no están al alcance de la comunidad de educadores matemáticos.

Teniendo en cuenta la complejidad del trabajo somos conscientes del carácter aproximativo de nuestras aportaciones, pero como entendemos que el sentido es construir un espacio de reflexión, para no atenernos ingenuamente a la traslación acrítica de resultados de investigación, establecemos como criterio de clasificación de las tendencias los diferentes énfasis que desde escuelas distintas se dan al estudio del problema de la educación matemática. Consideramos, en primer lugar, a las escuelas anglosajona y francesa por su historia y producción y las diferenciamos ya que el énfasis, en la primera, es la mirada interdisciplinar y, en la segunda, la perspectiva de disciplina autónoma. En segundo lugar, las escuelas que hacen énfasis en aspectos locales de tipo social, histórico y cultural: brasileña y mexicana porque están aportando a la comunidad internacional desde la perspectiva de búsqueda de autonomía regional.

Esperamos que con esta descripción se enriquezca la discusión que se desarrolla en la comunidad de educadores matemáticos en el país para que cobre fuerza y confianza en las propias posibilidades de desarrollo y participación en la comunidad internacional.

Cuestiones centrales

En la comunidad internacional, en general, se reconoce que el objeto de indagación es el complejo proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta indagación se fundamenta en el conocimiento matemático, la naturaleza de las matemáticas, el hacer matemático y el pensamiento matemático. Las interrelaciones y el énfasis que se coloca en el estudio de uno o varios de estos aspectos condiciona en gran medida la tendencia.

Escuela anglosajona

Identificamos en esta tendencia el énfasis que desde perspectivas disciplinarias distintas se realiza respecto a cada uno de los actores del proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

Acerca del aprendizaje

El escenario de estas teorías es la Teoría constructivista del Conocimiento; se abandona la tendencia psicologista aislada, para reconocer la especificidad del conocimiento matemático y se rechaza la tesis de que el alumno comienza la instrucción sin ideas previas. Se generan líneas de trabajo sobre concepciones iniciales ligadas a distintos núcleos conceptuales (límite, función, infinito...).

Se considera al alumno como un sujeto implicado en un proceso de aprendizaje de las matemáticas, abandonando así los estudios sobre el niño o adolescente, especialidad de la Psicología.

Se redimensiona la designación de dificultades cognitivas, adjudicadas a la "cabeza del estudiante" para situar la reflexión sobre los errores. Cabe señalar que, si bien este concepto es introducido por G. Brosseau para la Didáctica de la Matemática, —tal como se describe más adelante— en la perspectiva anglosajona, se asume desde la perspectiva de análisis cogni- cognitivo. El conocimiento asimilado es satisfactorio para resolver ciertos problemas, pero comienza a ser ineficiente en nuevos dominios de la Matemática. Dentro de los trabajos más relevantes se encuentran los realizados en el tránsito de la aritmética al álgebra (Both, Kieran Kücheman, 1992).

Se considera a la comunicación como objetivo de la enseñanza de las matemáticas; la interpretación tanto de la comunicación oral como escrita de las matemáticas escolares debe ser parte fundamental del proceso. Los procesos comunicativos y sus aspectos lingüísticos se consideran inherentes a los procesos de enseñar y aprender matemáticas. La relación entre lenguaje de las matemáticas y aprendizaje es formulada desde la Teoría de la Representación y los Sistemas Simbólicos de la Matemática.

Acerca de la enseñanza

Se reconoce que el desarrollo de la instrucción, las intervenciones del profesor determinan en gran medida el aprendizaje. El punto central de la investigación en la enseñanza es el referente a qué se enseña pero desde la perspectiva de la matemática escolar. En esta reflexión se cuestiona el alcance y función de la filosofía de las matemáticas como también su naturaleza, la justificación y la génesis del conocimiento matemático. Se reflexiona sobre la práctica de las matemáticas como actividad de interrelación donde se acuerda en consenso la validez del conocimiento. El proceso de creación del conocimiento matemático es de seres humanos. Especial relevancia cobra la aceptación de las matemáticas como parte del conocimiento humano y como parte de la cultura. Es resaltante, también, la posición de aceptar la fabilidad del conocimiento matemático. Es en ese sentido que la historia de las matemáticas se integra al trabajo en el aula. Las aplicaciones de las matemáticas a las ciencias y la tecnología son igualmente resaltadas como aspectos determinantes del cambio de las mismas matemáticas.

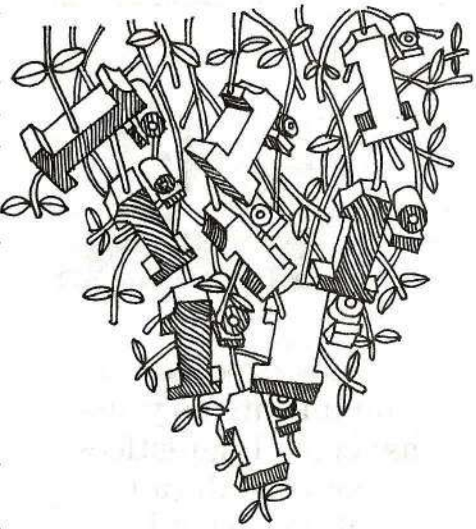
Se destroza el punto de vista del profesor como técnico, receptor y transmisor de información. La nueva conceptualización lo reconoce como sujeto reflexivo y constructivista, las decisiones que toma son el producto de su conocimiento sobre las matemáticas, las creencias sobre su naturaleza, y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las mismas. Este pensamiento determina su comportamiento en el aula.

Acerca del diseño y desarrollo curricular

Se reconocen determinados por causas sociales, políticas, culturales, las propias matemáticas, la Educación y nuevas tecnologías; en particular se reconoce que los currículos en matemáticas reflejan tradiciones culturales establecidas. Los estudios de comparación de currículo en diferentes países muestran las tendencias existentes, al mismo tiempo que sirven de orientación para la estructuración de propuestas curriculares (muestra de ello son las propuestas inglesa, española y norteamericana).

Escuela francesa

La reflexión teórica se viene desarrollando por investigadores como G. Brosseau, Chevellard, Vernaud, Artigue y Douady, su principal interés "es establecer un marco teórico original, desarrollando sus propios conceptos y considerando las situaciones de enseñanza y aprendizaje globalmente" (Godino 1991, p. 131). Brosseau, define a la Didáctica como "ciencia que se interesa por la producción y comunicación de los conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específico de los mismos" (1989, p. 3). Chevellard (1989), propone estudiar a la Didáctica de la Matemática desde una perspectiva antropológica puesto que sería el



estudio del Hombre (las sociedades humanas) aprendiendo y enseñando matemáticas. El estudio de los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se asume desde el enfoque sistémico, lo que implica que los hechos didácticos no puedan ser explicados por el estudio separado de uno de los actores (maestro o conocimiento matemático o alumno).

Acerca de la transposición didáctica

El proceso y las variables que intervienen en el recorrido del conocimiento científico a conocimiento susceptible de ser enseñable y al realmente enseñado es descrito por Chevellard como transposición didáctica.

El proceso se realiza al considerar, en primer lugar, el sistema didáctico, profesor, alumno, saber enseñado, los cuales tienen características propias devenidas de historias personales y culturales. La interacción entre estos conforma un sistema didáctico "temporal —aparecen cada año—, en torno a un saber específico y en un lugar determinado" (Chevellard 1991, p. 23). Su entorno es el sistema de enseñanza, el cual reúne el conjunto de sistemas didácticos y está conformado por un conjunto diversificado de dispositivos estructurales (diseñadores de currículo, textos, formadores de profesores, materiales curriculares, asociaciones de profesores, padres, políticos, rectores...). Su entorno es la noosfera, la que, a su vez, está inscrita en un entorno social, cultural tecnológico y científico que influye y decide sobre su funcionamiento. Es en la noosfera donde se selecciona el saber científico que debe ser enseñado. Al interior del sistema de enseñanza el saber seleccionado como saber enseñar (matemáticas escolar) debe ser transformado (temporalizado, secuencializado, despersonalizado). Con la descripción de los entornos del sistema didáctico maestro-conocimiento matemático-alumno. Chevellard propone reconocer los procesos necesarios que transforman el saber sabio, en saber enseñar y en saber enseñado. Este último sufre una nueva transformación al ser interpretado por el profesor.

Acerca de la componente cognitiva

Las representaciones construidas por los estudiantes están condicionadas por representaciones que se forjan globalmente por vivir una situación de enseñanza, su posición como alumno, para esta escuela, el comportamiento cognitivo del alumno es dependiente de la institución, hace parte de costumbres didácticas institucionales. Para Chevellard, conocer y saber un objeto conceptual depende de la institución donde se encuentre.

Acerca de lo epistemológico

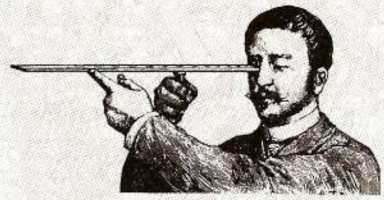
Este análisis es esencial pues permite tomar distancia, ejercer una vigilancia y controlar las representaciones de las matemáticas inducidas por la enseñanza. Con el análisis se hace conciencia de los procesos de evolución y se rompe el carácter de universalidad en espacio y tiempo, de rigor eterno y perfecto con que la enseñanza tiende a presentar los conceptos. Además, se toma conciencia de la distancia que separa el saber científico del saber enseñar.

Lo epistemológico también asume papel protagónico para cambiar el status de error. La noción de obstáculo epistemológico introducida a la Didáctica por Brosseau, —la noción fue planteada por G. Bachellard (1884/1962) en el estudio de las condiciones psicológicas de los procesos de la ciencia— cambia el status del error pues este "no es solamente efecto de la ignorancia o incertidumbre, sino efecto de conocimiento anterior que tuvo su interés, su éxito y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado" (1983, p. 173). Tres tipos de obstáculos se distinguen en la enseñanza: didácticos (consecuencias del sistema de enseñanza); epistemológicos (saberes mal adaptados) y ontológico (debidos a capacidades cognitivas del alumno).

Acerca de la metodología

Se propone como metodología de investigación para guiar la experimentación en clase a la ingeniería didáctica. Su sustento teórico es la transposición didáctica y la teoría de situaciones didácticas. El acercamiento sistémico de carácter global de la transposición y el carácter local de las situaciones caracteriza esta metodología.

La metodología, grosso modo, contempla las siguientes fases: análisis preliminar, diseño de ingeniería y puesta en escena y análisis de los resultados. El análisis preliminar involucra: la componente didáctica, (estado de la enseñanza), epistemológica y cognitiva. El diseño determina la elección de variables en juego (tratamiento del conocimiento, uso de tecnología, interacciones en clase...).



Los procesos comunicativos y sus aspectos lingüísticos se consideran inherentes a los procesos de enseñar y aprender matemáticas. La relación entre lenguaje de las matemáticas y aprendizaje es formulada desde la Teoría de la Representación y los Sistemas Simbólicos de la Matemática.

Escuela brasileña

Esta escuela, iniciada por el doctor Ubiratan D'Ambrosio, parte de la reflexión filosófica del por qué y para qué la educación matemática. La confrontación de educación matemática para el desarrollo y pueblos colonizados genera, según esta escuela, el cuestionamiento del por qué y para qué. Destaca, en ella, la negación que se ha dado tradicionalmente de la historia y los sistemas informales matemáticos, tanto orales como escritos, delimitados en espacios culturales y espacios temporales.

Propone responder a la educación matemática desde un punto de vista histórico, social, político y cognitivo, es decir, revisar críticamente las corrientes teóricas de cognición, epistemología, historia y política para tomar una decisión sobre la educación matemática. Por este camino, la educación matemática tendría el sentido de preparar para el ejercicio crítico y consciente de la ciudadanía plena.

Acerca de la etnomatemática

D'Ambrosio describe el sentido de la etnomatemática, desde una aproximación etimológica: "arte y técnica (techné=tica) de explicar, de entender, de comprender una realidad (matema), dentro de un contexto cultural propio (etno)" (1991, p. 72). Lo que incluye componentes atnográficas e históricas.

El proceso de aprendizaje se propone como resultante de la interacción del aprendiz con su ambiente social, cultural y natural. El maestro es una componente social, una de sus funciones es entender el proceso cognitivo del alumno desde su historia cultural. Si la escuela es institución socializadora, —constructora del comportamiento social de los ciudadanos—, el aprendizaje de la matemática debe adquirir dimensiones sociales. La enseñanza debe, entonces, centrarse sobre actividades como exploración de patrones y modelos de la realidad, no puede estar divorciada del contexto socio-cultural.

Esta escuela ha dado lugar a desarrollar trabajos de educación matemática en grupos cultural-culturalmente diferenciados (incluidos invidentes, multiculturizados, —emigrantes— y comunidades desfavorecidas e indígenas).

Escuela mexicana

El acento se coloca en el análisis de los discursos matemáticos escolares contenidos en los procesos de reformas y propuestas actuales de cambio para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Cantoral 1994). La investigación ha mostrado que estos discursos vienen signados de innovaciones en la aproximación a lo numérico, geométrico y analítico en situaciones específicas, como también influidos del uso de nuevas tecnologías para el aprendizaje. Por esta razón, las reformas no pueden reducirse a aplicaciones algorítmicas de propuestas curriculares, sino atender factores contextuales (tradición educativa, cultura) donde se realiza. Además, las propuestas se materializan en textos, los cuales, por ser catalizadores en cierta medida de las sociedades donde se producen, pueden conducir a crear imaginarios explicativos que evadan la realidad de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contextos específicos.

Cantoral señala que aún "los acercamientos didácticos franceses, alemanes o estadinenses" son fieles a sus propias tradiciones y, por ende, "distintos entre sí" (1994, p. 12).

Acerca del discurso matemático escolar

El análisis de los saberes en el escenario educativo debe ser punto inicial para vencer el carácter ilusorio, neutral y objetivo con que se han implementado reformas y contrarreformas en países latinoamericanos y para lograr el aprendizaje de la mayoría de los estudiantes en clase. Una visión crítica de los principios que sustentan la propuesta y de su articulación con otros elementos de proceso escolar es necesaria, para esta escuela, en tanto ello contribuye a hacer el balance de su adecuado funcionamiento. Especial importancia cobra el texto escolar puesto que es un objeto de representación en torno del que cual se organiza toda una estructura imaginaria de saberes didácticos.

Con este punto de vista se plantea que la comunidad latinoamericana proponga aproximaciones didácticas "que no sólo atiendan los nuevos recursos tecnológicos, sino que incorporen, también, en sus diseños aspectos de la realidad específica y sistémica en la que se encuentra nuestra escuela, atendiendo, incluso, las grandes diferencias regionales que suelen presentarse en nuestros ambientes de enseñanza" (Cantoral 1994). Esta escuela desarrolla su propuesta principalmente en diseños didácticos en Cálculo, así como abre la línea de trabajos sobre textos e historia de la enseñanza❑

Bibliografía

Brosseau G. "Les objets de la didactique des Mathematiques", *Actes du 2ª École d'Etè de didactique des Mathematiques, IREM,* Universidad de Burdeos, 1982.

"Utilidad e interés de la Didáctica para un profesor (primera y segunda parte)", *Revista SUMA,* No. 4, 5-12, México, 1989.

Cantoral R. ,"Los textos de Cálculo: Una visión de las reformas y contrarreformas", *UFR des Mathematiques,* Université de Paris 7, Francia, 1993.

D'Ambrosio U. "As matematicas e o seu entorno socio-cultural", *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática,* UNESCO, París, 1991.

Chevellard Y. *La transposition Didactique. La pensée Sauvage,* Editions, Paris, 1992.

Godino J. Concepciones, "Problemas y Paradigmas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas", *Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática,* UNESCO, París, 1991.

Gutiérrez J., Vidal E. (Editores), *Area de conocimiento: didáctica de las matemáticas: cultura y aprendizaje,* Síntesis S.A., Madrid, 1992.

Kilpatrick J. *En Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning,* Mac Millan, New York, 1992.

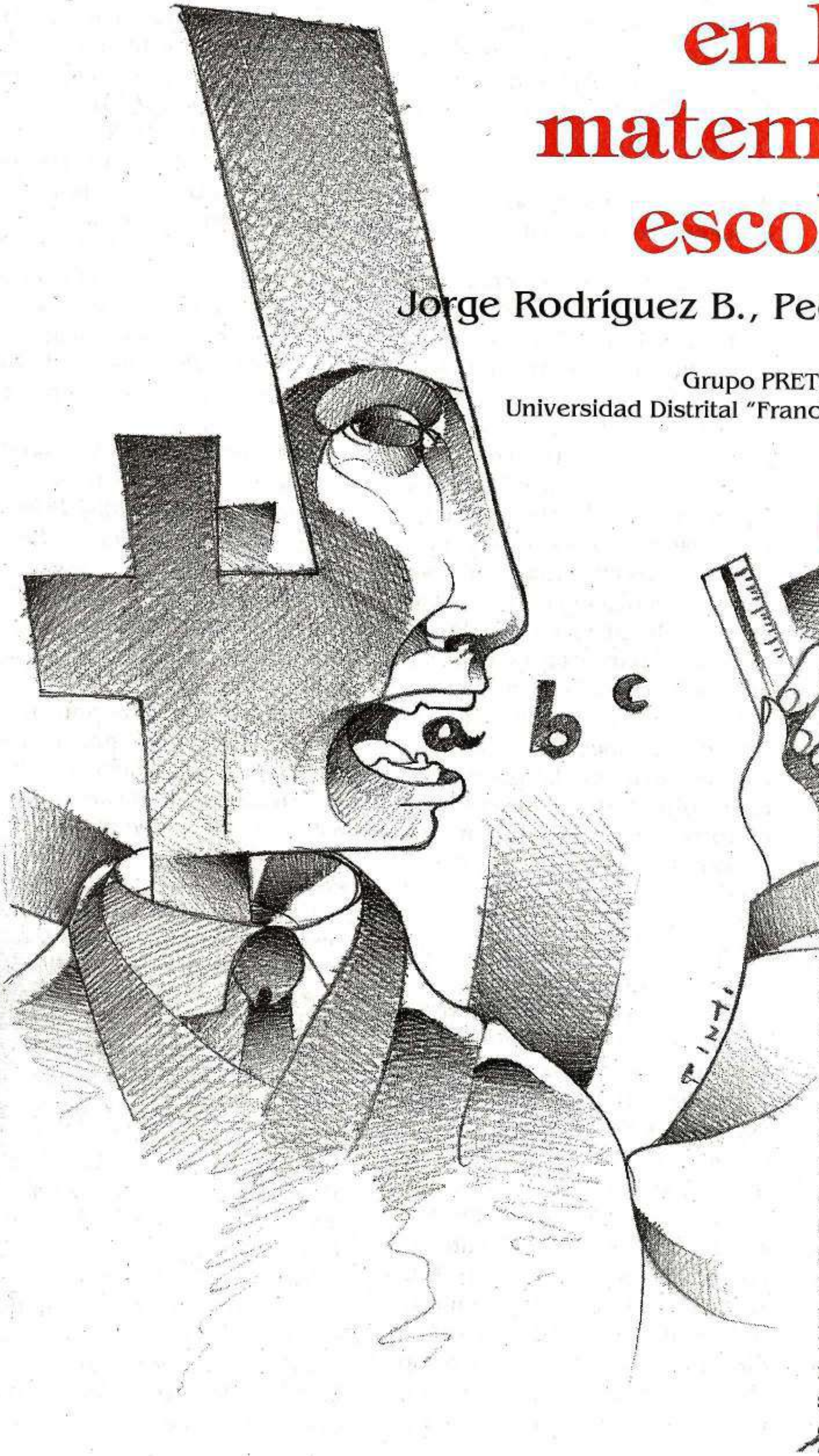
Kilpatrick J., Rico L., Sierra M., *Educación matemática e investigación,* Síntesis S.A., Madrid, 1994.

Vasco C.E. "La educación matemática: una disciplina en formación", *Revista Matemáticas, enseñanza universitaria,* Vol. III No. 2, Depto. de Matemáticas U. Del Valle, 1994.

La comunicación en la matemática escolar

Jorge Rodríguez B., Pedro Javier Rojas G.

Grupo PRETEXTO
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"



Cuando se está en una clase, particularmente de matemáticas, y en el contexto escolar (primaria y secundaria), uno de los principales elementos presentes es el lenguaje, tanto ordinario como matemático, desempeñando una función de mediador de la comunicación. Sin embargo, puede preguntarse hasta qué punto ella permite encuentros donde los interlocutores dotan de significación a los discursos desarrollados. En otros términos, los que señalan la intención de este artículo, se plantea la pregunta acerca de si a las *palabras* del lenguaje de las matemáticas puede atribuírseles una significación exacta, independiente del sujeto o si, por el contrario, ellas participan del carácter subjetivo de las del lenguaje ordinario que, al decir de Wittgenstein, tienen un significado dependiente de cada subjetividad y, por ello, es móvil tanto en el espacio y en el tiempo como en el sujeto que las significa. Puntualizando un poco más y a manera de ejemplo, ¿el significado que un matemático da a palabras como "conjunto", "pertenencia", "igualdad", "variable", entre muchas otras, es siempre el mismo y para todos?, ¿su simbolización: "**A,B,C**"," ", "=", "**x,y,z**", no produce alteración de los significados matemáticos?, ¿estas palabras y estos símbolos pueden ser significados por los estudiantes e, incluso, por los profesores, al margen del uso que de ellas se haga en el contexto del lenguaje ordinario?

Ahora bien, dado que un significado motiva, al tiempo que va acompañado de una *representación*, surgen preguntas análogas: ¿esa representación es la misma en y para todos?, ¿tiene un carácter subjetivo?, las cuales, junto con las formuladas en el párrafo precedente, serán enfrentadas desde una perspectiva práctica que llevará a darse algunas respuestas y, por qué no, a tomar una posición frente a ellas, que desembocará en la tematización de algunos de los problemas de la comunicación en la matemática escolar, como son la pretensión de evidencia de los discursos matemáticos escolares, e indicadores cognitivos y actitudinales de fortuna en la comunicación en y de la matemática escolar.

Algunas situaciones de aula.

Inicialmente, y para ambientar un poco los problemas de comprensión de parte de los estudiantes, surgidos de sus representaciones y significaciones de los conceptos matemáticos y su simbología, veamos algunos ejemplos en el terreno práctico[1].

Ejemplo No. 1

Un profesor, en grado sexto, tratando de explicar en qué consiste la igualdad de conjuntos, escribe en el tablero la siguiente pregunta:

¿{a,e,i,o,u}={x/x es una vocal}?

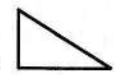
Sorprendido, encuentra respuestas como:

- La igualdad no es posible pues ***x no es una vocal.***
- La igualdad es falsa, pues el conjunto de la izquierda tiene cinco elementos, mientras que el de la derecha sólo ***uno*** porque si x es ***una*** vocal, no puede ser cinco.
- !Claro!, porque x puede ser cualquiera de las cinco vocales.

Mirada la pregunta desde la perspectiva del profesor puede inferirse que para él, ya que la trae como ejemplo, la igualdad es ***evidente*** y entonces no sólo la noción de igualdad de conjuntos se aclara sino, además, las formas principales de determinarlos: por extensión y por comprensión.

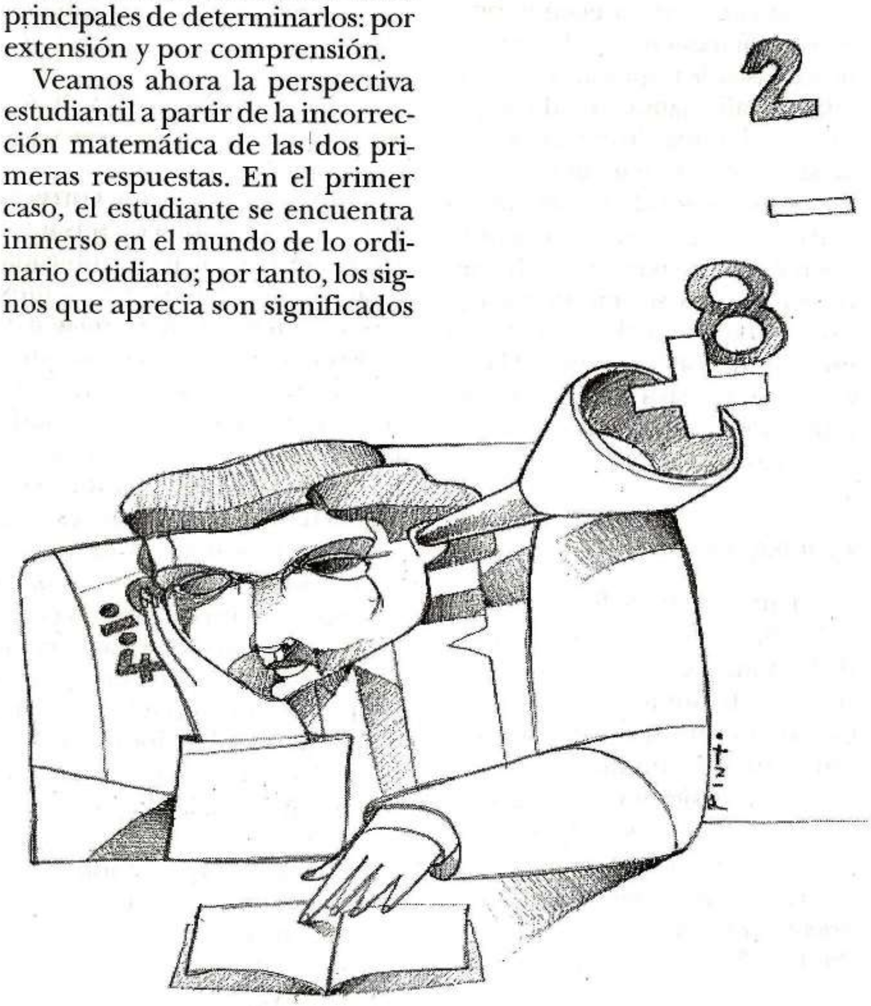
Veamos ahora la perspectiva estudiantil a partir de la incorrección matemática de las dos primeras respuestas. En el primer caso, el estudiante se encuentra inmerso en el mundo de lo ordinario cotidiano; por tanto, los signos que aprecia son significados a partir de la relación que establece entre ellos y su mundo, del cual hacen parte las letras. En el segundo, no sólo se encuentra en el mundo de lo ordinario cotidiano, sino que a los signos no les atribuye significado alguno, los considera objetos en sí mismos, por lo que encuentra la diferencia en la cantidad.

Ejemplo No. 2

¿Es el triángulo  un triángulo rectángulo?

La respuesta, casi invariable, entre los estudiantes hasta de

1. Los ejemplos aquí tratados no son hipotéticos, corresponden a situaciones de aula presentadas efectivamente.

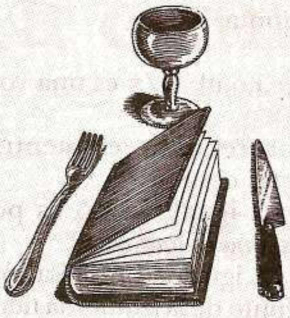


grado noveno, es negativa. Es de suponer que la pregunta la formula el profesor queriendo que los estudiantes la respondan utilizando lo que caracteriza a dichos triángulos: tener un ángulo recto; además de estar presuponiendo que para el estudiante, como para él, la figura propuesta, es una representación de un triángulo rectángulo cualquiera, y no de uno específico. Pero, ¿por qué esa respuesta? Una respuesta, que es más una conjetura, la da la práctica corriente, en la enseñanza de la geometría, de utilizar para hablar de perpendicularidad, el sentimiento inconsciente de perpendicularidad connatural al ser del "homus erectus", es decir, el estar de pie sobre una superficie que le da seguridad por la posibilidad de guardar el equilibrio. Más explícitamente, en la mayoría de los casos, la respuesta a esta pregunta es afirmativa cuando la posición del triángulo es tal que uno de sus catetos es paralelo a lo que le permite seguridad: el piso.

Aquí hace aparición, como comentario al margen, un hecho no estudiado suficientemente: los sentimientos de ligazón del estudiante con su mundo y la incidencia de éstos cuando de significar los signos del lenguaje matemático se trata.

Ejemplo No. 3

En una prueba formulada a 800 estudiantes aproximadamente de grados séptimo, octavo y noveno, distribuidos en tres colegios de estrato socio económico diferente de Santafé de Bogotá, aparecía la siguiente pregunta: "*¿Una manzana cuesta $200 y una pera $150. Si Y es el número de manzanas y Z es el número de peras compradas, ¿qué representa la expresión 200Y + 150Z?*". La respuesta, que



Los conceptos matemáticos permanecen para el estudiante en un "limbo" de nombres no contenidos por significación alguna. Se explica entonces por qué *la memorización* se constituye como única salida de los estudiantes para *sobrevivir,* temporalmente, en el mundo de las matemáticas.

en muy pocos casos fue correcta, correspondió a una de seis interpretaciones de la letra[2], ubicadas cuando ellas aparecen en contextos matemáticos: ***letra como objeto***; lo cual lo explican las respuestas de mayor aparición: "200 manzanas y 150 peras"; "la suma de las manzanas y las peras"; "el número de frutas compradas". Explícitamente, la letra es vista como representación de un objeto o como el objeto mismo, interpretación no catalogada como incorrecta, sino como ocurrencia debida, entre una de las razones atribuibles al ejercicio docente, al trabajo usual de los profesores en la iniciación al álgebra, cuando al hacer aparecer la letra le dan un uso que induce fuertemente esta interpretación, como en situaciones del estilo "15 flores más 8 flores da 23 flores" y luego escriben "15F + 8F = 23F", o, ya en el álgebra propiamente hablando, cuando plantean problemas como: "la edad de A es el doble que la de B y sumadas dan 30 años. ¿Cuáles son las edades?" y para modelar el problema escriben: "*A = 2B y A + B=30, entonces 2B + B = 30 ...*", donde definitivamente la letra evoca la persona y no su edad[3].

La comunicación

La lectura entre líneas de los ejemplos mencionados señala, pues, algunas de las razones para que la comunicación en matemáticas sea tan poco exitosa, entendiendo por esto la ausencia de comprensión significativa, tanto de aquello que exponemos cuando hablamos de matemáticas, como de las conexiones lógicas que validan la coherencia del discurso involucrado, en los casos donde efectivamente el discurso la tiene.

En primer lugar, aparece una actitud profesoral que, aunque inconsciente por lo natural a las personas, impide, al decir de los constructivistas, un aprendizaje significativo: centrarse en la propia perspectiva sin considerar las otras

2. Las seis interpretaciones aquí aludidas son referidas mediante los siguientes nombres: *letra evaluada, letra ignorada o no usada, letra como objeto, letra como incógnita específica, letra como número generalizado y letra como variable;* tipificación ésta surgida de una investigación realizada por D. KÜCHEMANN, en el año de 1978.

3. Las afirmaciones hechas en este ejemplo corresponden tanto a la memoria que se tiene, como a los resultados de la observación del trabajo en el aula en los tres colegios mencionados, en el marco de una investigación realizada por los integrantes del Grupo PRETEXTO de la Universidad Distrital, referida a la búsqueda de causas de incomprensión de la noción de variable en matemáticas.

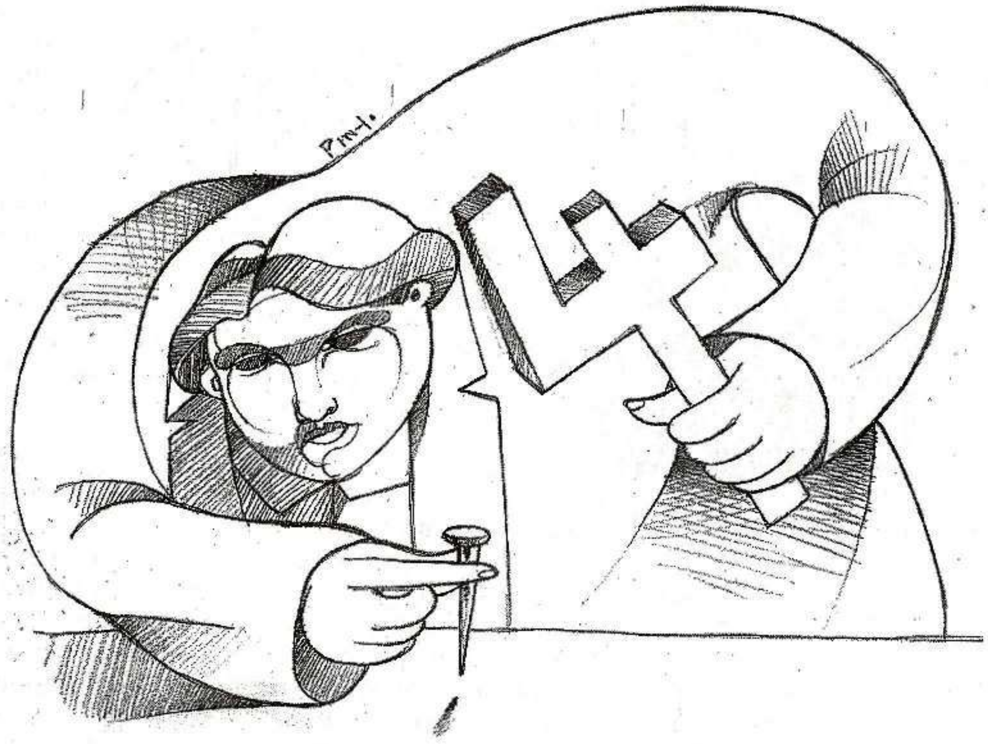
posibles de sus interlocutores. En otras palabras, creer que la evidencia expuesta para él en **su** discurso se manifiesta también a sus estudiantes, provocando así de hecho, *una doble dificultad.* Por un lado, el desarrollo de unos contenidos que poco o nada son asimilados por los estudiantes, y por otro, una incapacidad por parte del profesor para buscar alternativas de explicación, pues la consideración de evidencia, la consideración de que ***esto es claro a todas luces*** se lo impide y, por tanto, para hacer conciencia de estar siendo incom- prendido.

En segundo lugar, en la clase de matemáticas ineludiblemente debe utilizarse, tanto el lenguaje común, como el matemático. El primero, intentando decodificar al segundo y éste, a su vez, por una de las funciones atribuidas a los lenguajes ideales, procurando puntualizar significaciones matemáticas para algunas palabras presentes en el lenguaje ordinario. Esta dualidad, en el trabajo docente, se presenta más como antagonismo, que como factor de comprensión, pues el profesor, por su centramiento, pasa por alto que los significados requieren de un contexto de significación, es decir, desde una perspectiva cognitiva, que cada estudiante se desenvuelve en un mundo específico, único que tiene a su disposición, y que es en él donde tiene la posibilidad de encontrar aquellas existencias que le dan sentido, significado, a las palabras, lo cual implica que el significado matemático de una palabra, en los procesos de formación, no puede, ni debe desconocer el que ya tenga para el estudiante en el lenguaje ordinario. Un ejemplo aclarará este pronunciamiento. Cuando se quiere llegar a una definición como: *dos triángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales,* no debe perderse de vista, por ejemplo, que muy seguramente la palabra *semejanza* es significada por el estudiante como *parecido*, concepto ligado fundamentalmente a lo perceptual, por tanto inconveniente para llegar a una correcta significación matemática de la palabra semejanza, en tanto dos triángulos pueden ser parecidos, sin que sean semejantes.

Ahora bien, un hecho vinculado a los dos anteriores y que tiene su origen en el estilo tradicional de formación en matemáticas lo constituye el desconocimiento, consciente o no, por parte del profesor, que esta disciplina tiene un lenguaje, lenguaje de una especificidad semántica y sintáctica que les son propias y que, por tanto, lo diferencian significativamente del lenguaje ordinario.

El pasar por alto dicha especificidad, el no hacer conciencia de este hecho lleva, entonces, a que en la clase de matemáticas se asuma, implícita e inconscientemente, el lenguaje ordinario como único en juego posibilitándose, en consecuencia, que se llegue a pensar o a concluir, también de manera inconsciente, que la *formulación* lingüística de las matemáticas se logra a través de este lenguaje que, por no corresponder estrictamente a lo que se pretende enseñar, y por ser manejado bien o mal por el estudiante, hace erróneamente innecesarias alusiones claras, explícitas, intencionales y continuadas acerca de la semántica y la sintaxis del lenguaje matemático[4]: el profesor no se detiene para hacer formulaciones en torno a la especificidad de la simbología matemática utilizada en un momento dado, ni a lo que ella quiere significar —menos aún a lo que ha significado para los estudiantes—, ni a la estructura del discurso; tampoco a las formas lógicas de construir esas estructuras. Así, los conceptos matemáticos permanecen para el estudiante en un "limbo" de nombres no contenidos por significación alguna. Se explica entonces, por qué ***la memorización*** se constituye como única salida de los estudiantes para *sobrevivir,* temporalmente, en el mundo de las matemáticas.

4. Recuérdese por ejemplo, que cuando se trabaja en aritmética, la concatenación de signos, en algunos casos, refiere una estructura aditiva, 23=20+3, mientras, al pasar al álgebra, ella tiene una estructura multiplicativa, 2a=2xa. Esto, en la mayoría de los casos, no es tematizado por el profesor.



Acerca de la evaluación en matemáticas

Santiago González O.
Profesor de la Universidad del Tolima

1. Unas preguntas orientadoras

Una manera de acercarnos a la importancia o complejidad del "acto de evaluar" es reflexionando o discutiendo en torno a preguntas que surgen en las reuniones del Area, en comentarios en los pasillos de nuestras instituciones escolares o en exposiciones de los eventos académicos sobre tópicos cucurriculares. Algunas de estas preguntas se presentan en la tabla número 1:

Planteemos nuevos interrogantes con respecto a algunas de estas preguntas para preparar una cierta atmósfera de sentido a unas citas que haremos al final sobre posiciones de autores, instituciones o agremiaciones que estudian o investigan cuestiones relacionadas con la Evaluación en la Educación Matemática.

¿Cómo evaluar? ¿A cada estudiante por separado? ¿Solamente por grupos de estudiantes? ¿O, mejor, combinando lo individual y lo grupal?

¿Cuando evaluar? ¿En cada clase de Matemáticas? ¿Cada vez que se inicie (termine o en el desarrollo) una unidad, un contenido básico, un capítulo o una

Tabla 1

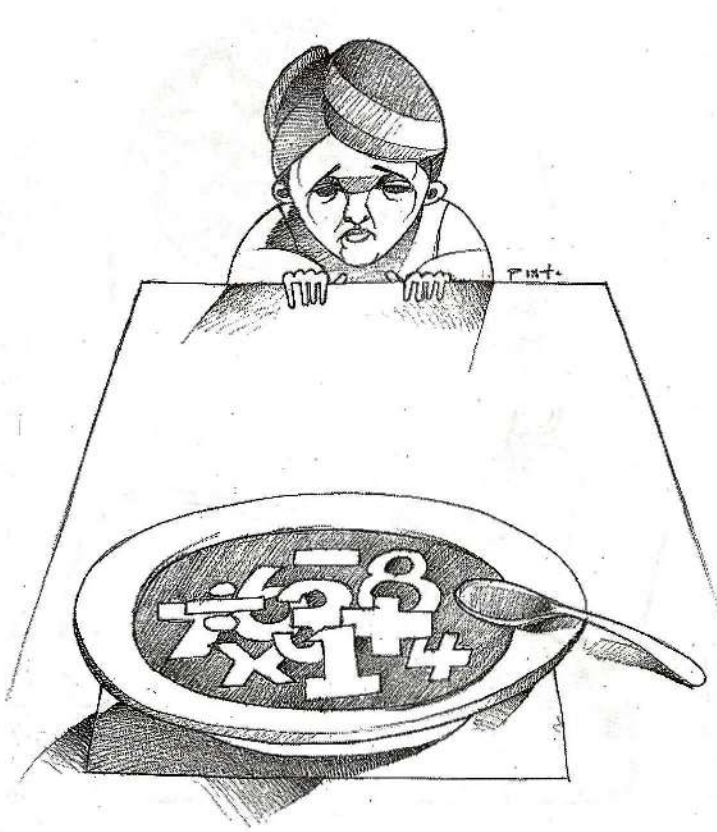
Evaluar en Educación Matemática

Qué	Dónde
Cómo	Con qué
Por qué	Para quién
Para qué	Por quién
Cuándo	Hasta dónde
...	...

sección del texto guía? ¿En el momento que lo indique el cronograma de la institución, el programa que sigue o el texto guía? ¿Tan pronto se presente una duda, una dificultad, una pregunta?

¿Con qué evaluar? Solamente con previas, exámenes parciales o finales? ¿Usando preguntas abiertas, tests? ¿Proponiendo problemas o ejercicios? ¿Dejando trabajos para realizar en el transcurso de uno y dos bimestres? ¿Permitiendo el uso de la calculadora o del computador? Aceptando que se puedan consultar los apuntes o el texto guía?

¿Quién evalúa? ¿Solamente el profesor? El mismo alumno debe aprender a dar un concepto sobre su propio trabajo? ¿La opinión de los demás estudiantes es una "información confiable" sobre la "calidad" de la participación de uno de sus compañeros en una actividad escolar? ¿Es necesario que los estudiantes (y los profesores) también sean evaluados por una institución externa a la escuela, como el ICFES o una similar contratada, (por ejemplo, por la Asociación de Padres de Familia) para esta finalidad?...



A lo mejor no encontraremos muchas discrepancias sobre la pertinencia de las preguntas de la tabla 1; no ocurriría lo mismo sobre algunas de sus respuestas. Parece que buena parte de la diversidad de respuestas acerca de la Evaluación (y de otros aspectos constitutivos del enseñar y del aprender las Matemáticas) tienen que ver con cuestiones de filosofía y epistemología de las matemáticas relacionadas con ¿Qué es la Matemática? ¿Qué es el conocimiento matemático? (ver Moreno L. y Waldegg G., 1992 y Vasco C.E., 1991), que influyen en nuestras concepciones acerca de, por ejemplo: Qué es enseñar, qué es aprender y qué es evaluar en nuestras clases de Matemáticas.

2. Unas respuestas

¿Qué es la evaluación? El profesor Luis Rico (1990, pág. 160) retoma la siguiente noción:

"La evaluación es el enjuiciamiento sistemático de la valía o el mérito de un objeto. Esta definición se centra en el término valor e implica que la evaluación siempre supone un juicio".

También nos remite al con qué, cuándo y para qué evaluar y nos recuerda algunos elementos tradicionales en nuestras prácticas de evaluación que a la luz de las orientaciones curricula- res que circulan internacionalmente, parece que va siendo necesario explicitarlos y estudiarlos para adecuarlos a las nuevas exigencias sociales (nacionales e internacionales), a la consolidación de las didácticas como disciplinas y a la presencia creciente, en la escuela, de nuevos instrumentos de representación como las calculadoras y los computadores.

"La evaluación se supone que es el juicio razonado que emite el profesor sobre la globalidad del trabajo de un alumno, durante un período determinado de tiempo. Sin embargo, los instrumentos que se emplean al evaluar en Matemáticas continúan siendo aproximadamente los mismos: pruebas escritas que se responden con papel y lápiz, o ejercicios que se resuelven en la pizarra.

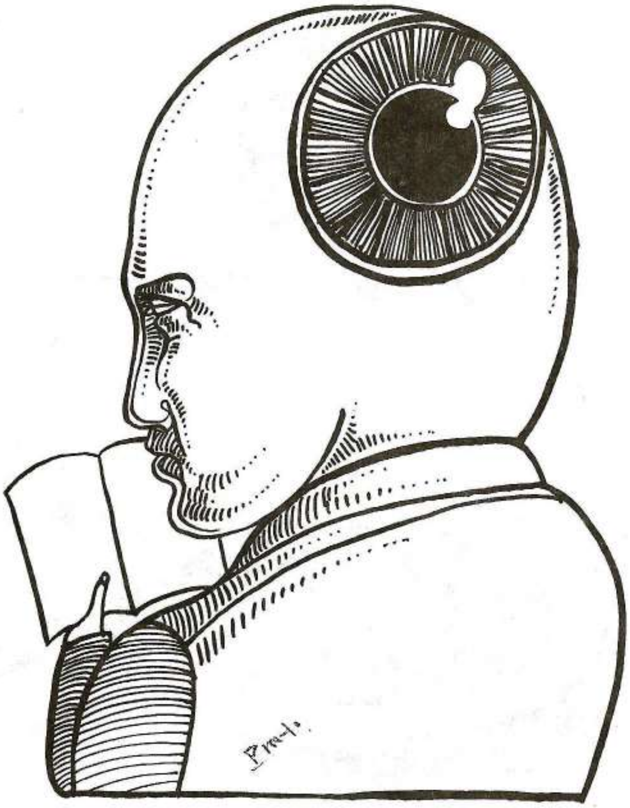
Esta precariedad es producto de una tremenda simplificación. La evaluación es una tarea compleja que sirve para tomar decisiones en educación. Entre muchas otras funciones, la evaluación puede servir para: *Hacer una valoración global sobre el grado de madurez conseguido en el dominio de unos determinados hechos, destrezas, conceptos o estrategias de una parcela de las matemáticas, al concluir un período de formación...*

Todas estas situaciones reflejan la variedad de juicios que pueden hacerse: calificar, seleccionar, emplear, diagnosticar, graduar, caracterizar, investigar, asesorar, incentivar, informar, etc.

Igualmente expresan la gran variedad de personas que aparecen implicadas en estas decisiones: estudiantes, administrativos, profesores, diseñadores de currículo, cargos directivos, empresarios, investigadores y padres.

Valorar implica que se ha hecho un juicio razonado de algún aspecto de un trabajo y por alguna finalidad específica. Por ello conviene insistir en que corregir y evaluar no son términos sinónimos.

Corregir pruebas escritas ha sido, en un momento histórico determinado, la forma usual de entender la evaluación. Las matemáticas, por sus características peculiares, se han prestado con facilidad a la elaboración de pruebas escritas y test estandarizados. No conviene olvidar que hay gran tradición en este ámbito, que se mantiene debido a la supuesta objetividad del método, entre otras razones...".



¿Qué es, para qué y qué evaluar? En el artículo *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* (1990) no sólo nos dan una respuesta a las anteriores preguntas sino que se sugiere un vínculo muy estrecho entre Currículo y Evaluación: "Esta sección presenta catorce estándares de evaluación, agrupados según el tema en que se centran: evaluación general, evaluación de los alumnos y evaluación del programa (ver Tabla 2)

Evaluación y Cambio:

Una reacción muy común al reto que suponen los estándares es, "Aunque sea pragmática, esta pregunta exime al individuo de la responsabilidad del cambio y la atribuye a cierta autoridad superior indeterminada. Reacciones más productivas —y que hacen más probable que el punto de vista incorporado en los estándares llegue a ser realidad— son las siguientes: ¿De que forma hay que cambiar el currículo? ¿Cuál es la mejor forma de efectuar esos cambios? ¿Cómo podremos saber cuándo se han alcanzado los Estándares?. En la respuesta a estas preguntas es donde surge el papel de la evaluación como componente fundamental de la reforma. La evaluación constituye una herramienta para hacer efectivos los estándares y realizar el cambio de forma sistemática. El principal objetivo de la evaluación, tal como lo describen estos estándares, es ayudar al profesor a comprender mejor lo que los estudiantes saben, y a tomar decisiones docentes significativas. La atención se centra en lo que ocurre en el aula con la interacción de profesores y alumnos. Por tanto, estos estándares de evaluación proponen cambios que van más allá de una mera modificación de los exámenes...".

3. Una conclusión

En nuestro país también se avanza en la reflexión en torno a la Evaluación en la Educación Matemática (ver Pérez

Tabla 2

Evaluación General	Evaluación de los alumnos	Evaluación del programa
1. Coherencia	4. Potencia Matemática	11. Indicadores para la evaluación del programa
2. Fuentes múltiples de información.	5. Resolución de problemas	12. Recursos curriculares y docentes
3. Métodos y formas adecuadas de evaluación.	6. Comunicación	13. Docencia
	7. Razonamiento	14. Equipos de evaluación
	8. Conceptos Matemáticos	
	9. Procedimientos matemáticos.	

J.H., 1994 y Kilpatrick J., 1995) aportando nuevas perspectivas relacionadas con este complejo, necesario e inevitable tópico educativo. ¿Qué hacemos los profesores de matemáticas ante tantos y tan excelentes puntos de vista acerca de la evaluación en matemáticas? Compartimos la recomendación que hace el Profesor C. E. Vasco U. (1991) para el caso de las escuelas matemáticas: No se trata de casarnos con un punto de vista para desconocer o subestimar los demás, ni hacer una "colcha de retazos" con partes de cada uno sino tratar de entender, mediante un estudio colectivo, sus posibilidades y limitaciones, sus convergencias y diferencias, ya no exclusivamente para calificar a los estudiantes sino pensando en obtener información confiable que permita tomar decisiones más convenientes, en cada momento, para los estudiantes, los padres de familia, los profesores de matemáticas, los investigadores en Educación Matemática, los directivos docentes, los autores de texto, los diseñadores de currículo, las editoriales o el ICFES❑

Bibliografía

Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). "Constructivismo y Educación Matemática", en *Educación Matemática,* Vol. 4, No. 2, agosto de 1992, Grupo Editorial Iberoamericana, México, pag. 7-15.

Rico, L. (1990) "Diseño curricular en educación matemática. Elementos y Evaluación", en Llinares, S. y Sánchez, Ma. V. (Eds) (1990), *Teoría y Práctica en Educación Matemática.* Ediciones Alfar, Sevilla, pag. 117-172.

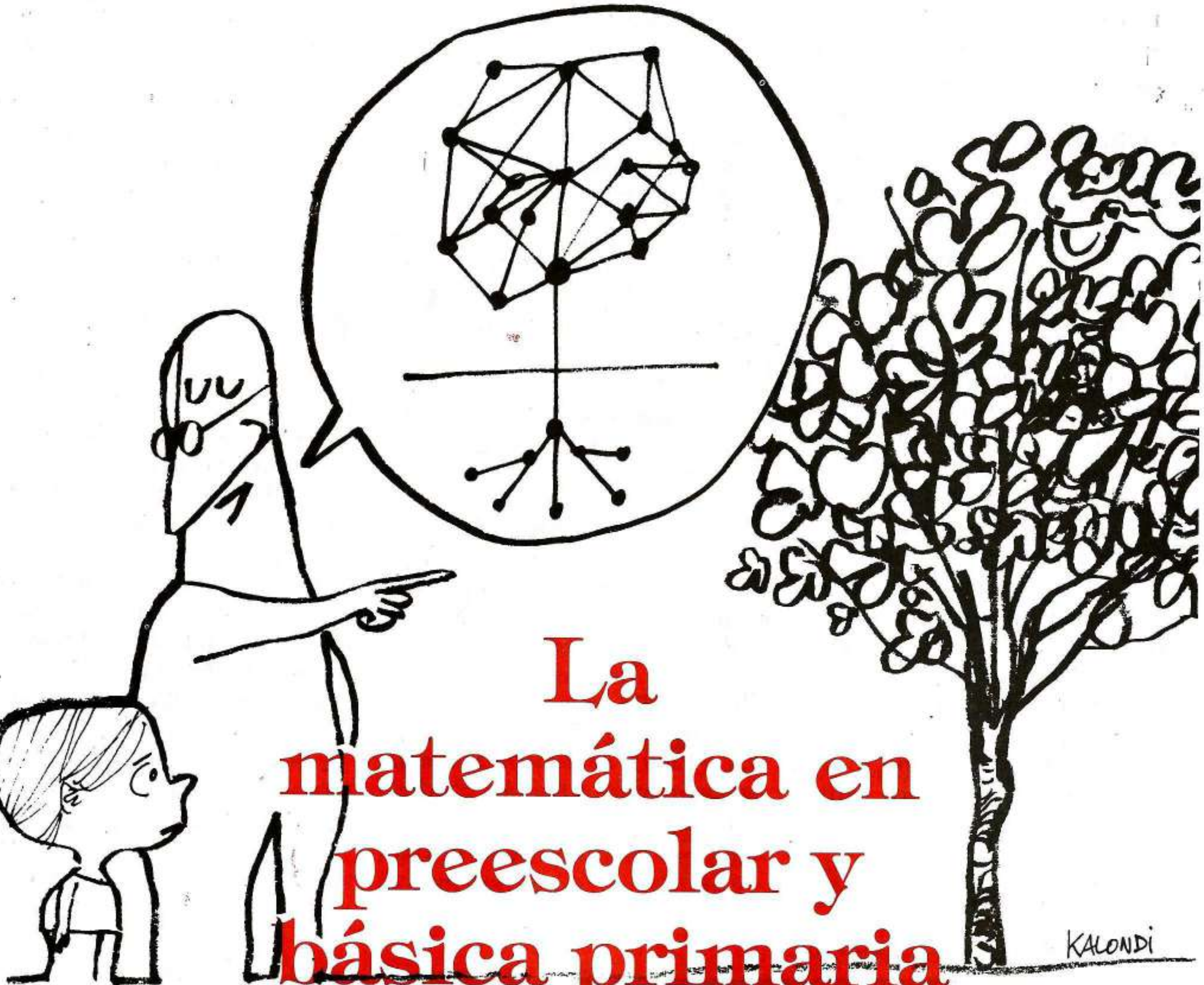
Stufflebeam, D.L. y Shinkfield, A. J. (1989), *Evaluación Sistemática. Guía teórica y práctica,* Paidós, Barcelona.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Estándares curri- curriculares y de evaluación para la Educación Matemática.* Edición en castellano por Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Thales, Sevilla.

Vasco, C.E. y otros. (1991). "¿Son las matemáticas una creación de la mente humana?", en M.E.N, 1991, *Propuesta Programa curricular. Noveno Grado de Educación Básica,* Bogotá, pag. 30-33.

Pérez, J. Hdo. y otros. (1994) "Una propuesta para la valoración de logros en matemáticas. ICFES-SNP", Documento No. 94, Serie Saber, No. 17, Bogotá.

Kilpatrick, J. (1995) "Técnicas de evaluación para profesores de matemáticas de secundaria" en Kilpatrick, J. Gómez, P. Y Rico, L. (Eds) (1995), *Educación matemática. Errores y dificultades, de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación, historia,* Grupo Editorial Iberoamérica, México, pág. 109-131.



La matemática en preescolar y básica primaria

Jorge Castaño García

Profesor de la Facultad de Psicología de la Universidad Javeriana,
Director Pedagógico de la propuesta **Descubro la Matemática**

Por el número y calidad de los esfuerzos que se hacen es necesario reconocer que en el país se viene abriendo paso, desde hace ya varios años, un movimiento interesado por el problema de la educación matemática; sin embargo, los resultados obtenidos parecen escasos en relación con los esfuerzos realizados.

Este estado de cosas tiene dos explicaciones posibles: las nuevas ideas no llegan hasta el aula de clase, en gran parte, porque el trabajo de formación docente no tiene la fuerza suficiente para que los maestros cuestionen las ideas que fundamentan sus prácticas e inicien procesos innovadores fundamentados en otras formas de comprender la educación, la escuela y los procesos de conocer; la segunda posibilidad de explicar estos resultados puede estar en que aún se está lejos de comprender los problemas de la enseñanza de la matemática y, como consecuencia, las propuestas que se ofrecen, algunas veces, poco favorecen soluciones radicalmente diferentes.

En este artículo se ofrecen algunas reflexiones sobre la enseñanza de la matemática en preescolar y básica primaria, que se han reelaborado desde la experiencia **Descubro la ma-**

tematica[1]. Inicialmente se desarrollan las ideas que sobre el proceso de conocer fundamentan la experiencia, para después estudiar las consecuencias que éstas tienen en el plano pedagógico. A través de la exposición se procura ilustrar los procedimientos con ejemplos retomados de la misma experiencia.

Postulados fundamentales

Primer postulado: El sujeto que conoce es un asignador de significado.

Este postulado asume que el sujeto no se limita a registrar la información que recibe sino que la organiza de determinada manera.

Sin riesgo a equivocación puede afirmarse que este postulado es común a los diferentes enfoques constructivistas. Este postulado obliga a hacer algunas preguntas: ¿Realmente el sujeto es un asignador de significado? ¿A partir de qué el sujeto organiza la información que recibe?

Algunos ejemplos que ilustran el papel significador del sujeto son:

Primer ejemplo: En una clase de segundo la profesora propone a los niños el siguiente problema para ser resuelto en grupo: Pedro tiene \$450 y desea comprar un carro que le cuesta \$900, ¿cuánto le hace falta para comprar el carro?

Los niños ofrecieron tres tipos de soluciones: Un grupo ofrece la solución 450 + 900 = 1.350. Ante esta solución, el maestro considera que los niños no han leído cuidadosamente el problema, seguramente piensa que si lo hubieran hecho no podrían

Los contenidos a enseñar no pueden definirse por lo que tradicionalmente se hace, tampoco respondiendo exclusivamente al ordenamiento de la disciplina, sino de acuerdo con una real síntesis entre las posibilidades del pensamiento del niño y las demandas del conocimientos propios de la disciplina.

ofrecer una respuesta tan disparatada, pero no es así, los niños dieron muestra de recordar casi textualmente el problema ¿Por qué entonces, consideran que se deben sumar los dos datos? Los maestros podemos recurrir a explicaciones tales como que los niños no prestan atención, no saben leer, o simplemente que irreflexivamente los niños ensayan cualquier solución, cualquiera de estas explicaciones tiene algo de validez. Pero a los maestros nos conviene, sin dejar de lado los aspectos ya señalados, ensayar otra explicación: los niños ponen a funcionar un esquema de composición. La experiencia y la investigación muestran que en un comienzo del proceso de construcción de un pensamiento aditivo, la pregunta del complemento es comprendida por el niño como una relación de composición.

El segundo tipo de solución consistió en representarse el problema como $450 + \_\_ = 900$. Los niños escribieron

$$\begin{array}{r} 450 \\ 450\,+ \\ \hline 900 \end{array}$$

La tercera solución, ofrecida por muy pocos niños, consistió en una resta 900 - 450. La maestra retoma esta intervención para explicar a sus alumnos que este tipo de problemas se puede resolver restando, que el resultado de la resta es precisamente lo que le falta a Pedro. En este momento de la clase aparece en el tablero,

$$\begin{array}{r} 450 \\ 450\,+ \\ \hline 900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 900 \\ 450\,- \\ \hline 450 \end{array}$$

Antes de cerrar la clase del día la profesora pregunta: ¿cuál de los dos procedimientos es más correcto? A pesar de las explicaciones recién dadas por la profesora, la mayoría de los niños contesta "la de la suma". Una niña explica, "que la de la suma porque el resultado (900) es mayor y tiene que ir abajo, que la otra no puede ser porque el resultado no puede ir arriba".

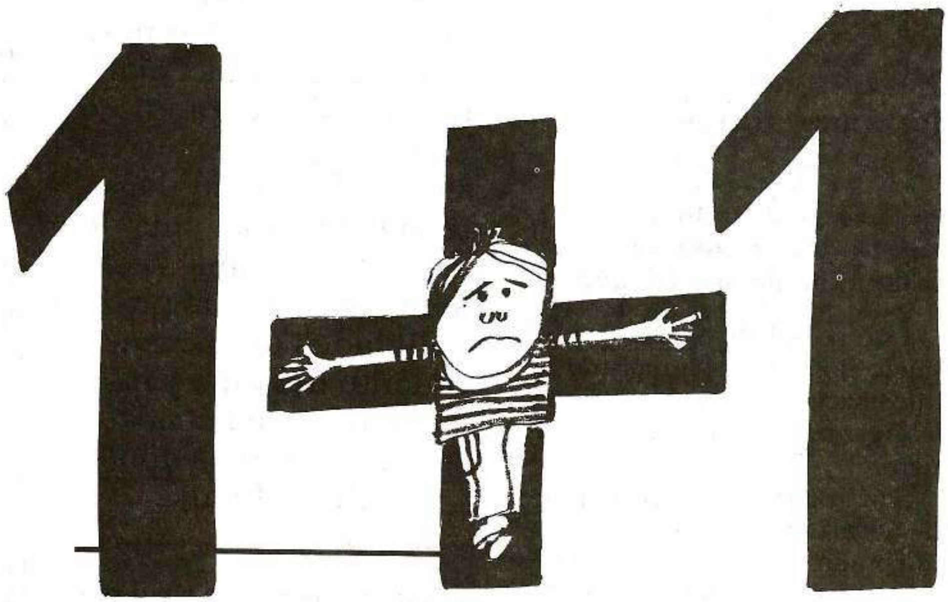
1. La propuesta Descubro la Matemática surge de la experiencia que en 1985 se inicia en el Colegio Champagnat, de Bogotá. Allí se empieza en preescolar y cada año se ha avanzado un grado; actualmente cubre los grados de preescolar a noveno. En 1991 se extiende a los demás colegios Maristas del país. En 1990 se empieza a implementar en los grados de preescolar y primero de algunas escuelas del D.C. Como fruto de esta experiencia se cuenta con una propuesta de educación matemática fundamentada en el desarrollo del pensamiento.

El ejemplo es ilustrativo, los niños organizan la información brindada por este problema poniendo a actuar un esquema de complemento. Aceptar la solución de la resta supone la capacidad de hacer una transformación lógica, es decir, transformar la ecuación 450 + — = 900 en 900 - 450 = — . En otras palabras, supone operar lógicamente con las relaciones de parte y todo y, para ello, es necesario poseer en el pensamiento una operación que permita entender la equivalencia lógica entre el complemento de una parte con relación a la totalidad y la excedencia de la totalidad con relación a una de sus partes. Si se carece de este esquema, la equivalencia de los dos procedimientos no podrá ser comprendida por los niños.

Segundo ejemplo: Ante un juego que nosotros llamamos "la ficha tapada", que consiste en que uno de los jugadores saca una ficha de un montón, mira el número que está inscrito en ella y la coloca bocabajo sobre la mesa, impidiéndole verla al contendor; después, de otro montón, toma una ficha y en esta ocasión la coloca sobre la mesa dejándole ver a su contendor el número que ella contiene. De acuerdo con una convención establecida, que generalmente está dada por el color, el número de esta ficha debe ser sumado o restado al que aparece en la ficha tapada (la ficha que ha sido colocada bocabajo). El juego consiste en que el jugador que conoce el valor de la ficha tapada hace la suma o resta y dice a su contendor el resultado obtenido, para que éste descubra su valor. En este juego los niños muestran en los procedimientos seguidos, las diferentes formas como se puede representar el problema. Para ilustrar estos procedimientos supóngase que una de las situaciones presentada es

	3 resta	da 5

gran el resultado. Algunos niños, o ellos mismos a medida que se van familiarizando con el juego, empiezan a mostrar mayor control de los ensayos, ya no colocan este número tan azarosamente, realmente muestran que están haciendo verdaderas hipótesis que procuran controlar.



El problema que se le plantea al niño es encontrar el número al que al restarle 3 da como resultado 5. (? - 3 = 5)

- Una de las soluciones que suele encontrarse es 5 - 3 = 2. Estos niños se representan la situación planteada por el juego, como un problema de resta, muy seguramente porque al aparecer una ficha que resta, hace que el niño dispare el esquema de descomposición (¿cuánto queda?).
- Otros niños logran comprender que se trata de encontrar un número desconocido que al restarle 3 da 5; como no lo conocen empiezan por ensayo y error, suponen que en la ficha tapada hay, por ejemplo, 4 y dicen entonces 4 - 3 = 1, como no sirve, intentan con otro número hasta que lo-

Para otros niños resulta claro, que si trata de encontrar el número al que se le ha restado 3, basta sumar 5 + 3. Cada vez que se les pregunta , ¿por qué suman 3 si este número resta?, ellos contestan algo así como "si se restó 3 y da 5, entonces el número era 5 + 3 porque 8 - 3 = 5". La respuesta muestra que tan evidente resulta a estos niños la transformación lógica que posibilita la estrategia ganadora de este juego.

El ejemplo ilustra por sí solo que efectivamente los niños están organizado información. Las soluciones del primer tipo son ofrecidas por los niños que no cuentan con la posibilidad de representarse en su pensamiento la composición de las partes para obtener una totalidad recién descompuesta. La segunda solución muestra los primeros intentos del niño por coordinar la composición y la descomposición, y la tercera corresponde a aquellos que son capaces de representarse en su pensamiento de manera simultánea la composición de las partes y la descomposición de la totalidad.

Pasemos ahora a la segunda de las preguntas que se habían formulado a propósito de reconocer al sujeto que conoce como asignador de significado, ¿a partir de qué el niño asigna significado? Los ejemplos anteriores han anticipado, en parte, que la respuesta es que el sujeto organiza información a partir del pensamiento que posee. El problema es precisar en qué consiste este pensamiento. La respuesta no es fácil y supera las posibilidades de este artículo, simplemente se ofrecerá una respuesta general y adecuada para la discusión posterior. El pensamiento está constituido por las formas y sus contenidos, a las primeras pertenecen todas las posibilidades que tiene el sujeto de operar, es decir, hace referencia a las posibilidades de establecer relaciones lógicas entre la información que recibe. En los dos ejemplos citados los sujetos organizan información estableciendo relaciones lógicas de partes y todo de acuerdo con el nivel de elaboración de este esquema. Al segundo campo, al contenido, pertenecen las informaciones que posee el sujeto, las valoraciones, afectos, en fin, lo vinculado a su subjetividad; en el caso de los ejemplos tiene que ver con las informaciones específicas de las tareas y todos los elementos de su subjetividad relacionados con sus experiencias de juego, con la matemática , etc. Unas y otras no son independientes. En particular la información aparece organizada en el pensamiento en sistemas que se estructuran según las posibilidades lógicas del mismo. Estas generalidades se irán aclarando un poco más a medida que se avance en la exposición.

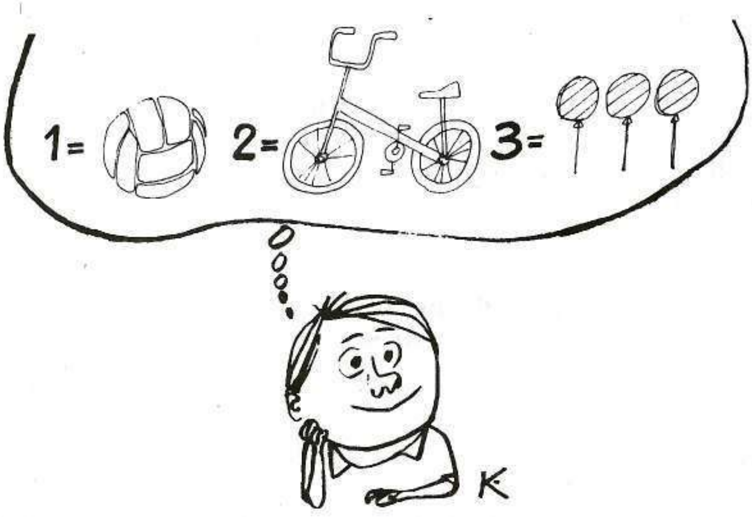
Segundo postulado: el pensamiento se estructura

El pensamiento logra niveles superiores de organización no por la asociación de mayor número y mejor calidad de habilidades específicas, sino por la mayor estructuración de los sistemas conceptuales que los constituyen. En el proceso de estructuración intervienen las posibilidades lógicas del pensamiento.

Este postulado ofrece una forma de entender el pensamiento radicalmente diferente a como lo comprenden las ideas en las que se fundamentan las prácticas pedagógicas tradicionales. Una idea muy difundida y propia de nuestra actuación en el aula de clase consiste en considerar que el pensamiento es un agregado de conocimientos y habilidades específicas. En nuestro país se difundió en su mayor nivel de organización con el formato propuesto dentro del Programa de Renovación Curricular. Esta concepción no es exclusiva de la tecnología educativa, es propia de todo enfoque asociacionista. A partir de esta idea, algunos lectores, después de aceptar los hechos mostrados en los dos ejemplos anteriores harán una consideración parecida a "de acuerdo, los alumnos no se limitan a registrar lo que se les presente, ellos son activos y organizan las explicaciones que se les ofrecen a partir de las posibilidades de su pensamiento, pero las cosas, en términos pedagógicos, son relativamente sencillas; si un niño no sabe algo hay que enseñárselo, si no sabe que para averiguar cuánto le falta a Pedro hay que restar del valor del carro lo que él tiene, hay que explicárselo y una vez que sea capaz de hacerlo proponerle otros problemas de la misma estructura hasta que logre aprenderlo. En igual forma, si el niño no es capaz de encontrar el valor de la ficha tapada sumando el resultado con el valor recién restado, hay que enseñárselo y practicarlo lo suficiente, no sólo en el contexto del juego de la ficha tapada, sino en muchos otros. Soportada en estas ideas la escuela ha logrado que los alumnos aprendan modelos más o menos aislados y lo aprendido está intimamente ligado a las condiciones en que fueron enseñados, pero basta, a veces, un poco de novedad para que los alumnos no puedan aplicarse a la situación dada. Finalmente, estos aprendizajes deben ser prácticados permanentemente porque de lo contrario se olvidan.

Si el pensamiento se estructura, entonces, desde el punto de vista pedagógico, no existe otra alternativa que ayudar al niño a estructurarlo y esto no va a lograrse porque se hagan actuaciones en campos específicos, sino porque se intervenga de manera global sobre éste. En el caso de los ejemplos vistos, si se acepta que las posibilidades de comprender los problemas allí planteados están dadas por el mayor nivel de estructuración de un pensamiento que relacione la composición y la descomposición, se hace necesario actuar ahí. Cuando se inspecciona en dónde están presentes estas relaciones se encuentra que es una estructura lógica que atraviesa muchos de los contenidos propios de la aritmética: está presente en la composición y descomposición de magnitudes como longitud, área, volumen, tiempo, capacidad y otras más, es en todos estos campos que hay que ir trabajando simultáneamente.

A continuación se derivan algunos principios de carácter general que, desde la propuesta **Descubro la matemática,** se considera que deben orientar el proceso de enseñanza de la matemática.



Principios orientadores de la acción pedagógica

Adecuar los planes de estudio a las posibilidades del pensamiento de los alumnos

Este principio exige, de una parte, conocer el pensamiento de los niños para identificar sus posibilidades y, de otra, hacer un análisis de las demandas lógicas de los diferentes sistemas conceptuales que se pretende enseñar para determinar hasta qué punto resulta adecuado enseñarlos en un momento dado.

De acuerdo con este principio los contenidos por enseñar no pueden definirse por lo que tradicionalmente se hace, tampoco respondiendo exclusivamente al ordenamiento de la disciplina sino de acuerdo con una real síntesis entre las posibilidades del pensamiento del niño y las demandas del conocimiento propios de la disciplina.

Las experiencias que se ofrezcan a los alumnos deben ser tales que tensionen, jalonen el pensamiento. Para que esta tensión se dé se requiere que la distancia entre las demandas lógicas que ellas hagan y las posibilidades del pensamiento de los alumnos sea tal que no esté tan lejos como para que desborde al estudiante y ya no le produzca ninguna tensión pues, en este caso al niño no le queda sino la posibilidad de memorizar lo que la escuela le exige aprender. En términos de Vigostky, las experiencias de aprendizaje que se ofrezcan deben caer en el campo de desarrollo proximal, si están más acá o más allá no le ayudarán a movilizar el pensamiento.

Organizar en forma no lineal los planes de estudio

Es necesario trabajar simultáneamente en diferentes sistemas conceptuales, en tal forma que las elaboraciones logradas en uno reporte progresos en los otros. Este principio no es más que consecuencia de considerar el pensamiento como un sistema de sistemas que se estructuran entre sí. Los avances del niño en un determinado sistema dependen, entre otros factores, de los niveles de organización lógica de su pensamiento, estos están presentes en varios sistemas conceptuales, razón por la cual ofrecer experiencias ligadas a diferentes y variados sistemas conceptuales se constituye en la estrategia pedagógica básica que sea capaz de afectar la globalidad del pensamiento.

Enfrentar a los alumnos a múltiples y variadas experiencias

Hacerse a la estructura que soporta un determinado concepto requiere que el niño tenga la posibilidad de reconocerla en diferentes contenidos particulares, sólo de allí podrá surgir la posibilidad de encontrar lo que permanece común a pesar de las particularidades. El vivir abundantes y variadas experiencias y el propiciar la reflexión sobre las acciones que ellas involucran permite al niño tejer la red de relaciones que estructuran un sistema de conceptos.

Hacer del aula un ambiente para la búsqueda colectiva

Es necesario generar otras formas de organización en el aula que promuevan un ambiente para el trabajo, el respeto, la tolerancia, el reconocimiento de la diferencia y en el que se promueva una verdadera comunicación. Las experiencias que se ofrezcan deben montarse de tal manera que permitan al individuo y al grupo encontrar sentido a lo que se hace, sólo de allí pueden surgir preguntas que se asumen como propias. Ya no se trata de limitar al niño a contestar las preguntas de otro (el profesor), preguntas que le son ajenas, cuyo único sentido posible de construir es el de recibir una aprobación reflejada en una calificación o reporte favorable.

Entender la evaluación como comprensión de un proceso

La evaluación debe orientarse a: comprender el desarrollo de los procesos comprometidos en la construcción del conocimiento matemático, tanto a nivel individual como colectivo. y a releer en forma crítica las concepciones que soportan las prácticas pedagógicas y las experiencias didácticas que se derivan de estas. La evaluación, entendida así, no puede limitarse a verificar simplemente el nivel de logros alcanzados, para introducir unos correctivos que se supone van a permitir ser superados en una etapa posterior, sino que debe estar atravesada 'por la duda, por esa duda que impide tener certezas y que, por el contrario, crea la incertidumbre.

Reconocer que el lenguaje es organizador del pensamiento y que, a la vez, es organizado por este

Este principio asume al lenguaje como simple posibilitador de comunicar el pensamiento que el sujeto logra estructurar en un momento dado, sino también como un estructurador de éste. De ahí se desprende que el maestro debe demandar y abrir todas las posibilidades para que el niño argumente sus ideas y contraargumente la de otros, incluido el profesor, que le parezca se oponen a sus formas de concebir las soluciones que él considera como válidas. Pero esto no es posible si no se hace del aula un verdadero espacio de comunicación, en el que haya lugar al debate racional, en que el profesor se asume como un posibilitador de éste, evitando imponer sus "verdades" por el papel de autoridad que le legitima su función, sus conocimientos y su mayor capacidad argumentativa.

En este punto el ejercicio de la escritura y la lectura cobra todo su valor. Cada vez más, a medida que se avance en los grados escolares, el maestro debe exigir a los niños que produzcan textos escritos elaborados, unas veces individualmente, y otras en forma grupal, que den cuenta de los argumentos que soportan la manera como comprenden y resuelven un problema❑

INSTITUTO PARA LA INVESTIGACION EDUCATIVA Y EL DESARROLLO PEDAGOGICO

IDEP

Alcaldía Mayor de Santa Fe de Bogotá, D.C.

I. PRESENTACION

El Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico de Santa Fe de Bogotá, D.C., es una institución de carácter académico, adscrita a la Secretaría de Educación, con autonomía administrativa y financiera, creada por el Acuerdo 26 de 1994 del Concejo de Santa Fe de Bogotá, D.C.

Su objetivo principal es promover la búsqueda de nuevos caminos para la investigación educativa y la cualificación de la formación de docentes teniendo como escenario privilegiado la ciudad. La ciudad está en permanente construcción y la educación es el proceso a través del cual se forma ciudadanía (en la escuela, pero también en los múltiples espacios de interacción social propios del mundo urbano). En este sentido, el horizonte del IDEP se inscribe en un proceso más amplio de creación y recreación permanente de la ciudad.

II. POLITICAS INSTITUCIONALES

1. Contribuir a la conformación de una nueva identidad intelectual y profesional del maestro

Se trata de fortalecer la profesión docente, integrándola a procesos investigativos que a la vez que amplíen su dimensión intelectual, aporten a la cualificación de su saber y al mejoramiento de las condiciones en las que desarrolla su práctica.

2. Consolidar una comunidad académica y científica de la educación

Todas las acciones del IDEP apuntan hacia la conformación de una comunidad académica de la educación integrada por todos aquellos docentes, investigadores y técnicos que trabajan en el campo educativo o aquellos que desarrollan actividades de carácter científico en otros campos disciplinares y están interesados en la problemática educativa del país.

3. Cualificar las prácticas pedagógicas institucionales

El espacio escolar debe permitir la exploración de nuevas formas de relación de los sujetos con los saberes e igualmente, requiere pensar una gestión de carácter pedagógico, abanderada por los docentes y mediada por los directivos docentes, que busque la cualificación permanente y la elaboración de propuestas pedagógicas alternativas.

4. Articular las instituciones escolares con otros escenarios educativos de la ciudad

Como la función educativa no es responsabilidad exclusiva de las escuelas y la educación no se agota dentro de las paredes del aula, es necesario la interacción con otros estamentos e instituciones que sin tener como propósito explícito la educación, inciden de manera cada vez más significativa en la formación de los ciudadanos.

5. Producir conocimiento educativo y pedagógico

La producción de conocimiento educativo y pedagógico se constituye en uno de los ejes fundamentales de la acción del IDEP, para lo cual se requiere avanzar en la construcción de teorías pedagógicas y modelos educativos alternativos que nos permitan leer de forma diferente la problemática educativa y fundamentar las distintas experiencias de innovación.

III. CAMPO DE ACCION

El campo de acción institucional está constituido por tres líneas:
1. Investigación educativa y pedagógica
2. Formación permanente de directivos y docentes
3. Innovaciones educativas y pedagógicas.

Estas líneas no son independientes, coexisten articuladas para guiar la acción institucional y en su despliegue dan forma al campo de acción del Instituto. Su condición no es la horizontalidad sino la transversalidad, fijando rumbos y tejiendo relaciones de tal forma que permitan el desarrollo de acciones multidisciplinarias.

IV. ESTRATEGIAS

El IDEP desarrollará sus acciones atendiendo a tres estrategias principales: fomento, apoyo y desarrollo institucional.

Se entiende por fomento la generación de condiciones favorables para la formación de líneas de investigación, formación permanente de docentes, constitución de grupos de trabajo y estudio y desarrollo de experiencias de innovación que aporten conocimiento y muestren caminos para enfrentar una determinada poblemática del campo educativo.

Por apoyo se entiende aquellas actividades que permitan consolidar y fortalecer especios académicos en las instituciones educativas o en las localidades. Se trata de fortalecer experiencias actuales (individuales, colectivas, institucionales e interinstitucionales) en cualquiera de las líneas de acción del instituto.

El desarrollo institucional se inscribe en la intención del IDEP de avalar y posibilitar proyectos generados desde su propia dinámica, en orden a la configuración de una comunidad académica educativa. El desarrollo institucional busca perfilar al IDEP como un espacio esencialmente investigativo y formativo, con una estructura administrativa y operativa que gira en torno a los imperativos que demanda su campo de acción. Por otra parte, busca ofrecer las condiciones para captar intereses de los profesionales adscritos y de aquellos grupos de docentes y de investigación del Distrito Capital dispuesto a experimentar, explorar, validar y/o generar proyectos educativos y pedagógicos.

CONVOCATORIA PARA LA PRESENTACION DE PROGRAMAS DE FORMACION PERMANENTE DE DOCENTES
(Conducentes a créditos para Ascenso en el Escalafón)

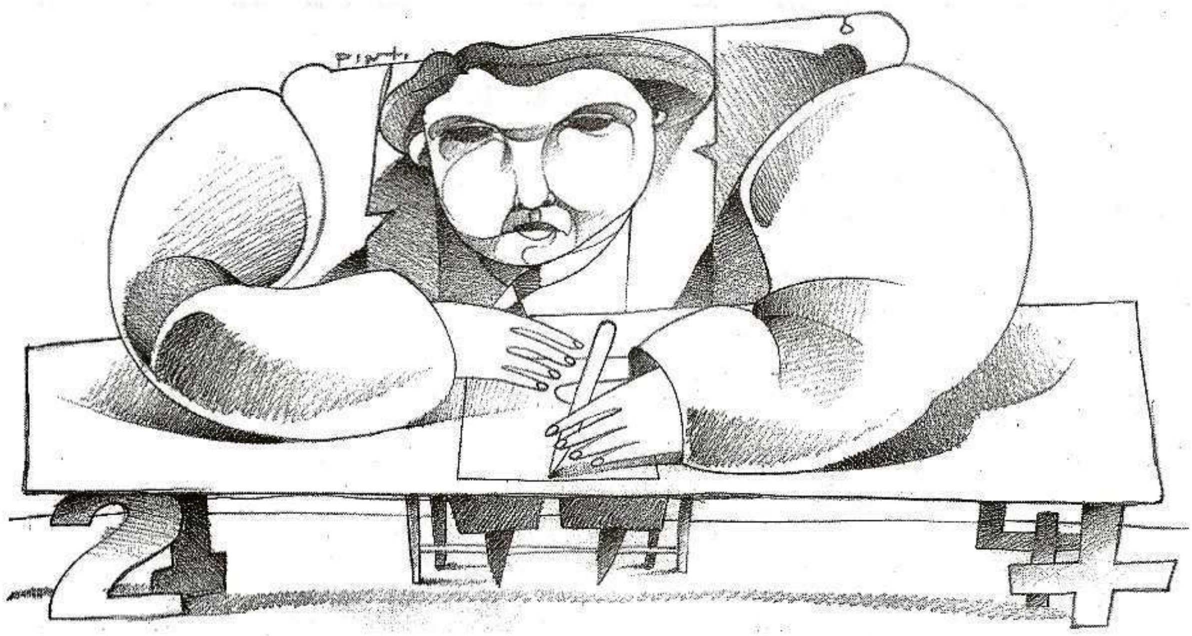
El Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo Pedagógico IDEP, de acuerdo con el Convenio 071 de Noviembre 2 de 1995 firmado por el Ministerio de Educación Nacional, la Alcaldía Mayor de Santa Fe de Bogotá, D.C. y el IDEP, convoca a todas las instituciones de educación superior del Distrito a que presenten Programas de Formación Permanente de Docentes conducentes a créditos para ascenso en el escalafón.

Los lineamientos para la formulación de dichos Programas podrán ser retirados en el IDEP a partir del 4 de Marzo.

Sede: Carrera 19A No. 1A-55
Barrio Eduardo Santos

Tels: 2469111 - 2462532 - 2895921 - 2336369
Fax 2895669

IDEP



Proyecto Anillito

Cultura matemática en Educación Básica

Bladimir Torres A., Beatriz Espinoza B.

Anillo de Matemáticas - ADE.
Colegio San Francisco, Localidad 19, Bogotá.

La Asociación Anillo de Matemáticas, de la Asociación Distrital de Educadores, consciente de las dificultades por las que atraviesa la educación en Colombia se ha planteado la necesidad de crear espacios alternativos al ambiente escolar cotidiano; dicha urgencia surge del hecho de reconocer que el potencial intelectual, emocional y afectivo de nuestros niños está siendo subutilizado en la escuela.

El presente proyecto de investigación propende por la formación integral en Educación Matemática de los estudiantes de quinto grado en educación básica y se está desarrollando en Santa Fe de Bogotá en Ciudad Bolívar, en el colegio Técnico Distrital San Francisco (localidad 19); cuenta con la aprobación de la Secretaría de Educación de Bogotá, para un período de tres años.

Aspecto operativo del Proyecto

Población. Tres mil (3.000) niños, estudiantes de grado 5º de las instituciones oficiales de la localidad 19 de Santa Fe de Bogotá.

Muestra. Sesenta niños de grado 5º de las escuelas Distritales Acacia I y II, San Francisco I, II y III de la jornada de la tarde. Se trata de un grupo mixto (niños y niñas) con edades entre 9 y 12 años, provenientes de un sector económicamente deprimido, que asisten al colegio 6 horas semanales en la jornada de la mañana y cuya jornada escolar regular se cumple en la de la Tarde.

Propósitos generales

— Ofrecer un espacio alternativo al ambiente escolar cotidiano (maestros - niños) en el que se posibilite el desarrollo intelectual y motivacional de los niños.

— Propiciar en los alumnos el desarrollo del Pensamiento Matemático a través de la interiorización gradual de estrategias cognitivas —elaboradas por el equipo de investigación AMA— como *la sustitución, la reversibilidad, el manejo de niveles de representación y la realización verbal de las acciones.*

— Asumir como eje de investigación la relación entre *lenguaje pensamiento* puesto que el lenguaje es no sólo el medio para comunicar conocimiento sino, también, la manera de explicitar las formas como éste se aborda, los constructos logrados en el proceso, el contexto desde el cual se habla, la coherencia lógica del discurso, las formas de argumentación y, por supuesto, el estado del desarrollo conceptual e intelectual.

A nivel espefico: problemas de investigación

Indagar sobre la periodización de la realización verbal de las acciones que los alumnos realizan durante la construcción del conocimiento matemático.

Asumimos la estrategia denominada Realización verbal de las acciones (Talizina), como la representación en forma verbal (oral o escrita) de los objetos que intervienen en ella, y de las transformaciones que sufren dichos objetos durante el proceso que se cumple a través de la acción; dicho en forma más sencilla, se trataría de "hacer con las palabras" lo mismo que se ha hecho antes con las manos sobre los objetos.

Por otra parte, asumimos como premisa básica del presente proyecto el concepto de Zona de Desarrollo Próximo, propuesto y desarrollado por Lev Vigotski en relación con su Ley Genética General de Desarrollo y definido por su autor como la distancia entre el desarrollo real del niño y su desarrollo potencial; una interpretación de este concepto permite vislumbrar que colocar a los niños en Zona de Desarrollo Próximo significa crear para ellos unas condiciones que les permitan, a partir del desarrollo que ya han logrado, acceder a funciones que en el momento apenas comienzan a aparecer.

Principios orientadores del trabajo

A partir de la reflexión sobre los referentes teóricos de las escuelas de pensamiento: Ginebra, (Piaget, Hans Aebli), Soviética, (Vigotsky, Talizina, Leontiev, Luria), Francesa, (M. Focault), Viena, (Habermas), Sociológica, (Bernstein), el Anillo de Matemáticas ha construido los siguientes principios orientadores de su trabajo:

i. *Los niños nunca se equivocan,* Puesto que sus elaboraciones están siempre inscritas en contextos precisos que tienen sentido y significado para el niño.

ii. Desde el punto de vista de la elaboración del conocimiento *existe un cierto paralelismo o correlación entre las formas históricas de construcción de conocimiento y la génesis y constitución del conocimiento individual.*

iii. Ninguna teoría es capaz de explicar en su totalidad la complejidad del acto pedagógico, esto supone que las teorías no son excluyentes sino que entre ellas *existe un principio de consistencia mutua.*

iv. Existe una estrecha relación entre desarrollo intelectual, desarrollo motivacional (ético) y desarrollo lingüístico (acción comunicativa).

Plan de actividades

Este ha sido diseñado desde la necesidad de atender, por una parte, las limitaciones de los niños en su formación matemática y, por otra, para ir configurando y consolidando los sistemas conceptuales en esta área de conocimiento. Estos sistemas conceptuales se han configurado en cuatro grandes temas de pensamiento: lógico, estocástico, espacial y numérico; las actividades son, fundamentalmente de tres clases:

1. Actividades individuales de tipo abierto, es decir, no están concebidas para cumplir instrucciones sino para permitir que cada alumno se oriente en el cumplimiento de su propia acción.

2. Actividades en grupo que posibilitan la discusión y la cons-

trucción de consenso (negociación de significados).

3. Actividades de puesta en común, en donde se argumente la validez de las soluciones a los problemas propuestos y se construya consenso entre lo planteado en los grupos.

El uso y valoración del lenguaje oral y escrito se constituye en el énfasis fundamental para el desarrollo de las anteriores actividades.

Una de las actividades desarrolladas con los niños es la resolución y formulación de problemas, la cual está organizada de la siguiente manera: el maestro narra o lee una situación, los niños la reconstruyen y la recontextualizan, en forma oral y escrita, le hacen el mayor número de preguntas convirtiéndola en problema y luego plantean las posibles soluciones a algunas de ellas. El ejemplo que presentamos a continuación es una transcripción del trabajo realizado por el niño John Alexander Urrego (12 años), con respecto a la situación "la cocina común".

Situación narrada a los niños

Tres vecinos se reúnen para hacer una comida común; como necesitan un fogón, Petronila pone tres leños de su leña, Hilda pone cinco leños y Pancracio, quien no tiene leños, les da ocho dólares.

Elaboración del niño:

Problema: La cocina común

¡Tres viejos vecinos hicieron un asado! ¡Quedó muy rico! Petronila, Hilda y Pancracio. Petronila puso 3 leños, Hilda puso 5 leños y Pancracio 8 dólares para Hilda y Petronila. ¿Cuántos dólares le tocan a Hilda y a Petronila?

Posibles soluciones

1. Como don Pancracio les dio 8 dólares para las 2 vecinas que le dejaron cocinar su comida y como doña Hilda puso 5 leños y Petronila puso 3 leños que, al sumarlos, el resultado sería 8. Entonces al dividir los 8 dólares entre los 8 leños nos daría que 1 leño vale 1 dólar, entonces como doña Petronila dio 3 leños le corresponden 3 dólares y como doña Hilda dio 5 leños le corresponden 5 dólares.

5+3 = 8 leños   8/8 = 1 dólar

2. Si don Pancracio, doña Hilda y doña Petronila hubieran dado 8 dólares en vez de leños daría 24 dólares.

8 x 3 = 24

Entonces como hay 8 leños, cada leño valdría 3 dólares.

24/8 = 3 — cada leño

Entonces quedamos en que cada leño no vale 1 dólar sino 3 dólares, entonces como doña Petronila puso 3 leños serían 9 dólares.

3x3 = 9

Entonces doña Petronila puso 9 dólares y tocaba dar sólo 8 dólares y había puesto 1 dólar más y como don Pancracio dio 8 dólares por los leños, de ahí que a Petronila le pertenece 1 dólar.

9 — US que puso Petronila
– 8 — dólares que tenía qué poner
1 — Lo que le prestó a Pancracio

8 — dólares que dio Pancracio
– 1 — dólar que cogió Petronila
7 — Dólares que sobraron.

Entonces como sobraron 7 dólares y doña Hilda puso 5 leños que serían 3 por 5 = 15. Don Pancracio puso 8 dólares pero ya le dio uno a Petronila, le quedan 7 que son los de Hilda.

1) 3 x 5 = 15 y 15 - 8 = 7
2) 8 - 1 = 7   3) 7 - 7 = 0

1) 3 lo que vale un leño
5 los leños que puso Hilda
15 total de dólares que puso Hilda
8 dólares que tenía que dar.
7 dólares que puso demás o sea que fueron los dólares que le prestó a Pancracio.

2) 8 dólares que dio Pancracio
1 dólar que le correspondió a Petronila
7 dólares que le sobraron a don Pancracio.

3) 7 dólares que le sobraron a don Pancracio
7 dólares que le faltan a Hilda
0 total de 8 que dio Pancracio.

Entonces a Hilda le correspondieron 7 dólares y a Petronila 1 dólar❑

Bibliografía

Elliott, John, *La investigación-acción en educación*, Ediciones Morata, Madrid, 1990.

Foucault, Michel, *Las palabras y las cosas*, Siglo veintiuno editores, México 1991.

Kemmis, Stephen y otro, *Teoría crítica de la enseñanza*, Editorial Martínez Roca, Barcelona. 1988.

Piaget, Jean, *Introducción a la Epistemología Genética, Pensamiento matemático*, Ediciones Paidós, México, 1987.

Talizina, N., *Psicología de la Enseñanza*, Editorial Progreso Moscú, 1988.

Wertsch, James, *Vigotski y la formación social de la mente*, Ediciones Paidós. Barcelona. 1988.

La evaluación del concepto de número

Orlando Mesa Betancur
Profesor coordinador de la maestría en pensamiento lógico-matemático.
Facultad de Educación. Universidad de Antioquia.

La evaluación, lo acepta todo el mundo, no debe ser puntual sino integral, y cuando es cualitativa da una mejor información sobre los logros y las carencias de los niños. En el caso de la evaluación de los aprendizajes matemáticos, además de indicadores específicos para conocer logros alcanzados, deben considerarse, también los factores asociados con una mayor incidencia (afectivos y socioculturales, por ejemplo). En general, un buen sistema de evaluación condiciona las estrategias seguir por la movilización de las competencias de los niños.

Una de las situaciones que más preocupa a los maestros y sicólogos es la relacionada con la evaluación del concepto del número que puede poseer un niño cuando ingresa a la escuela o cuando lleva uno o dos años en ella.

A continuación se presentan unas sugerencias para indagar diferentes niveles de conceptualización sobre el concepto de número, observables en niños que inician la educación primaria o cursan el primero o segundo grado de la educación básica. Aunque no es una prueba formal, en el sentido clásico; es decir, no es un instrumento rígido en cuanto al diseño preciso y secuencialmente ordenado de las preguntas, frente al cual dispondríamos siempre de una interpretación y calificación únicas, sí es una propuesta estructurada que facilita la interpretación cualitativa de estados diferentes de comprensión del concepto de número.

Justificación

Existen, a partir de las investigaciones piagetanas, innumerables estudios e investigaciones sobre la construcción significativa que elabora progresivamente el niño sobre el concepto de número; sin embargo, los resultados de estos trabajos no llegan al maestro o, cuando llegan, poseen interpretaciones generalmente reduccionistas o simplificadoras de lo que realmente hablan dichos estudios. Así, por ejemplo, las investigaciones piagetanas sobre la conservación de cantidades —continuas y discontinuas— fueron realizadas bajo controles teóricos y experimentales que no pueden ser reproducidos en el aula de clase o en el consultorio para concluir sobre el estado cognoscitivo del niño, similarmen- te a como lo puede hacer un científico piagetano. Aparece, entonces, un problema de interés pedagógico: ¿Cómo utilizar en la enseñanza los resultados de investigaciones realizadas en otros contextos teóricos y/ o experimentales?

Una respuesta funcional

Para tomar posiciones aceptemos algunos principios de identidad pedagógica:

1. La escuela no es un laboratorio para la investigación psicológica realizable por maestros.

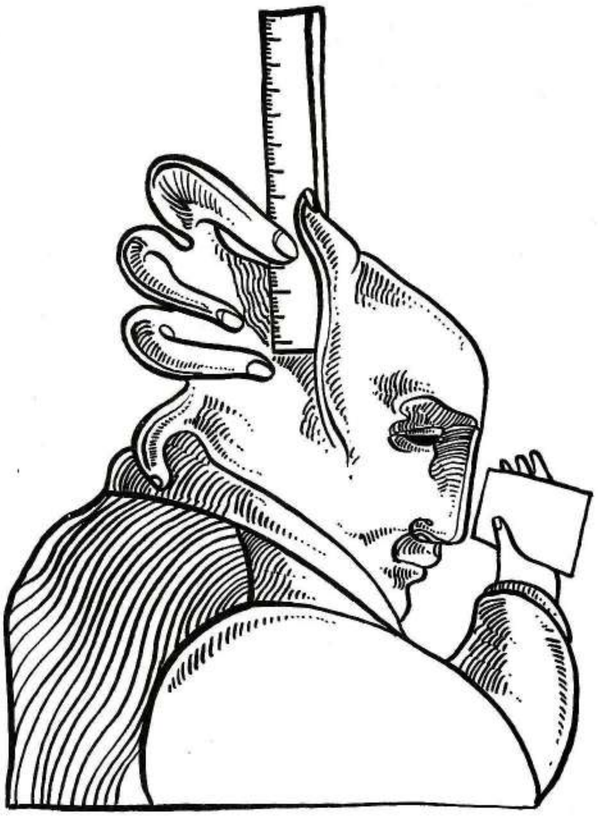
2. Las variables que intervienen en la construcción de un concepto, como el de número, son muchas más que las consideradas por cada investigación particular. Entre otras causas, porque las investigaciones, llamadas básicas o de frontera, exigen concreciones y particulariza- ciones cada vez más refinadas y precisas, lo que, contradictoriamente, cierra los ojos del investigador para no ver otras variables y relaciones que otro investigador está observando, o que todavía nadie observa.

3. El contexto escolar posee siempre una especificidad que puede afectar la enseñanza y el aprendizaje y cuyo peso puede llegar a ser mayor que el de las variables comunes a otros contextos. Por ejemplo, niños en condiciones de desarrollo cognoscitivo similar pero con influencias culturales diferentes pueden o no acceder a un estado de aprendizaje matemático equivalente; es el caso de niños que necesitan los conocimientos aritméticos para interactuar en su entorno social o laboral, y de niños que no requieren estos conocimientos con tanta exigencia (niños de clase alta, por ejemplo).

4. El currículo debe estar abierto para recibir, crítica y adecuadamente, toda la información disponible para cambiar y cualificar la acción pedagógica, constituyéndose en un espacio de investigación autónomo y permanente, con su propio marco teórico y experimental.

Una búsqueda de comportamientos específicos

En las relaciones del niño con su entorno importa activar procesos de toma de conciencia. Entendida ésta como la reflexión sobre los acontecimientos que le ocurren en el medio, y sobre las acciones que el niño realiza.



Dadas las dificultades para conocer las características de la representación que tiene cada niño en un momento dado de su desarrollo es necesario indagar cuidadosamente para conocer con mayor profundidad y precisión su mundo interior, e intentar la cualificación de los comportamientos analizados.

Buscando señales

Las diferentes formas comunicativas —verbales, escritas de todo tipo, gestuales y motrices— son los indicadores básicos para analizar los comportamientos cognoscitivos de los niños. En otras palabras, *la comunicación es el espacio más importante para trabajar con los niños y para promover la cualificación de sus actos.* La importancia que tienen las conductas del relato[1] para hacer que la comunicación con el niño se transforme en un mediador más eficaz, puede analizarse así:

Comunicación durante la actividad

Cualquiera sea la situación diseñada para iniciar la interacción con los niños, es conveniente incitarlo para que explique lo que está haciendo y pensando y, si es posible, que "justifique" de alguna manera el porqué o para qué lo está haciendo. Lo anterior tiene importancia cognoscitiva puesto que

[1] Interpretadas y ampliadas a partir de la obra citada de Mialaret: Las matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan. Pablo del Río, Madrid, 1977.

el niño es promovido a pensar en la acción o en el acontecimiento; pero, también el maestro o el acompañante disponen de indicadores que informan sobre lo que el niño está comprendiendo y de las calidades de la comprensión. Por ejemplo: un niño de aproximadamente 4 años llena, durante una sesión de trabajo, varias hojas en blanco dibujando rayas con lápices de colores. Al preguntarle por lo que hay representado en cada hoja responde que en una está la piscina, en otra el mar, en otra el río, y en otra solamente rayas. Todas las hojas "parecían" representar lo mismo: un "enredo" de rayas, pero aunque se mezclaran las hojas, el niño era capaz de volver a reconocerlas diferenciándolas con exactitud.

La maestra había dado la siguiente instrucción para la actividad: "vamos a usar los colores para pintar rayitas y dibujar el agua". El niño pintó rayitas y lugares que conocía, donde había agua.

Sin indagar al niño sobre el significado de sus acciones no se hubiera descubierto lo que estaba pensando.

Más aún, en la hoja de rayas que llamó "río", algunas rayas significaban árboles; en la hoja que llamó piscina -casi las mismas rayas- significaban el edificio donde estaba la piscina.

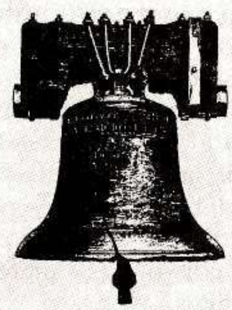
Muy a menudo la comunicación verbal con un niño es difícil o incompleta. A veces se limitan a responder señalando con el dedo, o volviendo a ejecutar la acción para dar cuenta de una representación, pero lo importante es que responda de alguna manera.

Comunicación posterior a la actividad

Se trata de promover, en el niño, la evocación de las actividades realizadas en el pasado; así se facilitan los recuerdos de los aprendizajes logrados; sobre todo de aquellos que fueron resultado de la superación de conflictos. Ellos regresan a la memoria consciente, luego de participar en las complejas interacciones cerebrales donde, posiblemente, han ocurrido asociaciones, olvidos, cernidos y cambios de significación.

Examinando la evocación de las actividades pasadas, el maestro puede analizar el estado de los aprendizajes, las posibles lagunas o las cualificaciones ocurridas con el paso del tiempo. Simultáneamente, el estudiante reflexiona y se esfuerza por recordar los significados de sus acciones, facilitándose así la aplicación de las competencias para la solución de nuevos problemas.

Se desprende, de aquí, una estrategia importante para el maestro: *todos aquellos conocimientos considerados como fundamentales o básicos, deben ser evocados en diferentes intervalos de tiempo.*



En el caso de la evaluación de los aprendizajes matemáticos, además de indicadores específicos para conocer logros alcanzados, deben considerarse, también los factores asociados con una mayor incidencia (afectivos y socio culturales, por ejemplo). En general, un buen sistema de evaluación condiciona las estrategias a seguir por la movilización de las competencias de los niños.

Comunicación antes de la actividad

Consiste en buscar la anticipación de los resultados para obtener por las acciones sobre objetos concretos o simbólicos. De esta manera se pueden conocer las concepciones que poseen los estudiantes, el modo como aplican sus conocimientos y las estrategias que utilizan para resolver problemas. Esta comunicación es fundamental para la movilización de los comportamientos matemáticos de tipo inductivo, como los que tienen que ver con la capacidad de plantear conjeturas y descubrir fórmulas y leyes generales.

La interpretación de los aprendizajes matemáticos

Representaciones Interiorizadas de las operaciones y las relaciones

Las acciones del niño sobre los objetos se transforman en operaciones mentales a través del mecanismo de la función semiótica, que da cuenta, tanto de la representación de acciones e imágenes ocurridas en el presente y en el pasado, como de los cambios en los procesos de simbolización y significación. Las operaciones son explicadas por Piaget[2] según un modelo formal, llamado agrupamiento. Sobre este modelo, se escribe:

Encontramos tal estructura en ocho sistemas distintos, todos representados en grados diversos de acabamiento, en el comportamiento de los niños de 7 a 8 años hasta los 11 o 12 años, sistemas que se diferencian entre sí según se trate de clases o de relaciones, de composiciones aditivas o multiplicativas y de correspondencias simétricas (o biunívocas) o asimétricas (o counívocas).

Todos estos agrupamientos definen el llamado pensamiento operatorio concreto o competencias para clasificar y seriar desde la representación mental; primero, clasificando y seriando de acuerdo con un solo criterio (comportamiento aditivo), y posteriormente, de acuerdo con varios criterios (comportamiento multiplicativo). Específicamente, el niño ya es capaz de realizar inferencias a partir de lo real, teniendo en cuenta la reversibilidad de las operaciones (inversiones) de las relaciones (reciprocidad).

En el aprendizaje matemático, la presencia de los agrupamientos posibilita la comprensión simultánea de las operaciones de adición y sustracción y del conteo operatorio, como también de las nociones básicas de la medida. La cualificación de los agrupamientos, consecuentemente, permitirá aprendizajes más complejos como son los propios para las nociones de peso y volumen.

Por ejemplo: las siguientes relaciones estarán en la posibilidad cognoscitiva del niño operatorio:

Reversibilidad entre operaciones:

Sin entrar a caracterizar, en este momento, lo que Piaget llamó "pensamiento concreto" y "pensamiento formal", es importante resaltar una característica común a ambos tipos de pensamiento y que puede considerarse como el indicador fundamental de la calidad de la inteligencia, en el sentido piagetano. Se trata de la reversibilidad o capacidad del pensamiento para anular o compensar una acción realizada con objetos materiales o simbólicos.

Gracias a la reversibilidad podemos considerar, simultáneamente, las relaciones entre el "todo" y las "partes", ya se trate de una clase y las subclases que se obtengan de ella, o de las comparaciones entre las relaciones, propiamente dichas. Algunos ejemplos sobre esta capacidad, aplicada para la comprensión significativa de algunos conceptos elementales de la matemática, nos pueden servir para entender su importancia en la resolución de problemas.

Ejemplo 1. La reversibilidad entre la adición y la sustracción

La adición y la sustracción constituyen una relación fuertemente estructurada, en el sentido piagetano; esto es, no se puede comprender la una sin la otra. Simbólicamente, asociadas al modelo: a+b=c, están los modelos: c-a=b y c=b=a. Así un niño comprende, significativamente, la adición "8+2=10" con las sustracciones: "10-2=8" y "10-8=2". Esta comprensión requiere que, previamente, el niño haya comprendido las relaciones cualitativas entre clases y subclases; por ejemplo, que en una colección de lápices —la mayoría rojos y algunos blancos— la colección total (lápices), es la unión de los lápices rojos con los lápices blancos. Y que si retiramos los lápices rojos, quedan los blancos, o si retiramos los blancos, quedan los rojos.

En este ejemplo se está utilizando la reversibilidad por inversión; es decir, la propia de las relaciones entre clases que permite "anular" o "abstraer" las diferencias cuando se considera la clase total. Nos "olvidamos" de las cualidades "rojo" y "blanco" para reconocer, únicamente, la cualidad "lápiz", o recuperamos las cualidades para identificar la clase resultante de la sustracción de clases.

Ejemplo 2. La reversibilidad entre la multiplicación y la división

Existe, también, una relación fuertemente estructurada entre las operaciones multiplicación y división. Simbólicamente, para el

[2] Piaget, J. y Beth, E. W. Epistemología matemática y psicología. Traducción española: Grijalbo, Barcelona, 1980.

esquema "axb=c" existen los esquemas de la división: "c/a=b" y "c/b=a". El niño comprenderá el significado del esquema "4x3=12" asociado a los esquemas: "12/3=4" y "12/4=3". Comprensión que inicialmente se indagará en la repartición de una colección: en subgrupos con el mismo número de elementos o distribuyendo equitativamente los elementos en subgrupos determinados.

Ejemplo 3. La reversibilidad en y entre relaciones

Para comprender significativamente la relación de minorancia: "7<9" (7 es menor que 9) se requiere la comprensión simultánea de la relación de mayorancia "9>7" (9 es mayor que 7). A este tipo de reversibilidad lo llama Piaget, *reversibilidad por reciprocidad.*

En matemáticas es común encontrarse situaciones que se representan simbólicamente con el esquema: "a<b<c", y en donde interesa la interpretación de las relaciones, simultáneas, del término "b": "b>a y b<c" ("b" es mayor que a y menor que "c").

También se puede interpretar la reversibilidad como una compensación de una acción o de una operación. Así, si desplazamos un objeto de un punto "A" a un punto "B", podemos efectuar la acción inversa trayendo el objeto del punto "B" al punto "A" o, podemos compensar la primera acción con otra: desplazándonos desde el punto "A" al punto "B" y así compensar la primera acción realizada.

En el origen de la reversibilidad requerida para las relaciones matemáticas se encuentran todas aquellas conductas de comparación que realizan los niños cuando actúan en su entorno. No importa que estas actividades se realicen teniendo en cuenta las propiedades físicas de los objetos (color, forma, tamaño, peso, etc.) o recurriendo a criterios de

Las acciones del niño sobre los objetos se transforman en operaciones mentales a través del mecanismo de la función semiótica, que da cuenta, tanto de la representación de acciones e imágenes ocurridas en el presente y en el pasado, como de los cambios en los procesos de simbolización y significación. Las operaciones son explicadas por Piaget según un modelo formal, llamado agrupamiento.

funcionalidad, uso o necesidad; en el momento en que el niño toma conciencia -o reflexiona- en sus acciones y comparaciones, está penetrando en el pensamiento matemático.

La presencia de la reversibilidad -capacidad de anular mentalmente las acciones- es el indicador fundamental para reconocer cuándo puede un niño iniciarse **en el aprendizaje matemático.**

Observando la reversibilidad en el conteo

Acontinuación se presenta una secuencia indagativa para detectar el estado de la comprensión del concepto de número, cuando el niño se inicia en el aprendizaje del conteo, de acuerdo con nuestro sistema de numeración. Las tres primeras actividades no garantizan la existencia de la reversibilidad en el niño, pero las siguientes exigen esta competencia para ser realizadas comprensiblemente:

Actividad 1: Para registrar el conteo verbal

La mayoría de los niños "cuentan" verbalmente desde muy temprana edad. Se requiere saber hasta qué número llega secuencialmente, esto es, sin "saltar" un número.

Actividad 2: Para indagar el reconocimiento perceptivo del número

¿Identifica o no los numerales (signos) de los números que expresa verbalmente?

Situaciones previas

Con anterioridad al reconocimiento de la cardinalidad del número se presentan algunas situaciones cognoscitivas que son importantes para el análisis del proceso constructivo de esta noción. Veamos:

Las colecciones con "2" "3" y "4" elementos

El campo perceptivo para reconocer, como un todo, colecciones de objetos relativamente cercanos en el espacio, se construye progresivamente durante los primeros años de vida; es decir, no se requiere contar "uno a uno" los objetos para saber cuántos hay, si el número es "pequeño". Sin embargo, el número de objetos que se pueden percibir como una totalidad depende, tanto de la cantidad como de la distribución de ellos en el espacio. Generalmente, un niño alcanza la percepción de las colecciones hasta con 4 elementos, y algunos hasta 5, durante los años anteriores a la escuela primaria.

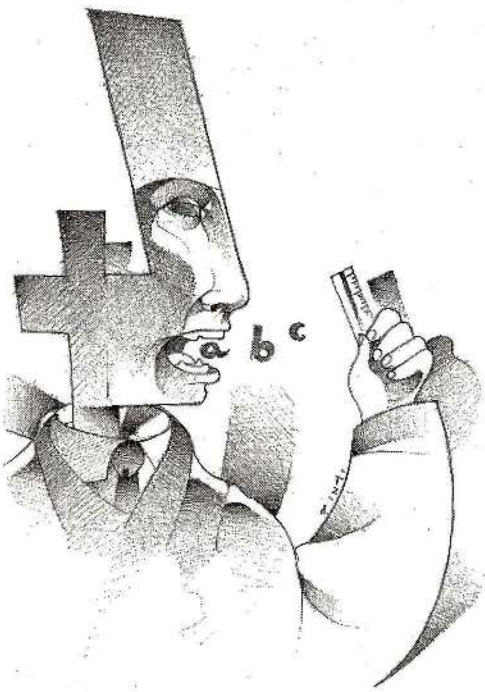
Las colecciones con "5" o más elementos

Ya para una colección con "5" elementos, las configuraciones espaciales comienzan a afectar el reconocimiento de la invarianza de la cantidad. Así, en las representaciones con forma de collar o de circunferencia, para colecciones con "5" "6" y "7" elementos, las exigencias perceptivas son mayores que para las representaciones que aparecen en el juego del dominó.

Actividad 3: Escritura de numerales

Se invita a los niños para que escriban los símbolos numéricos que conocen, es decir, aquellos que previamente han reconocido. La evaluación de las respuestas puede efectuarse de un modo similar a como se hace con los grafemas de la lengua. Sobre este tema, escribe Rubén Darío Hurtado[3].

En el análisis de la escritura inicial de los niños podemos observar los factores internos y unos externos. En los últimos está la parte figural: calidad, tamaño y direccionalidad de las grafías. En la calidad observamos cómo evolucionan las formas de representación gráfica, desde los trazos más primitivos, como es el caso del garabato, pasando por el dibujo y las seudoletras hasta llegar a la letra o grafema socialmente reconocido. En el tamaño tenemos en cuenta el proceso seguido por el niño para construir una forma normal de los grafemas. Así como consideraremos la direccionalidad propia de nuestra lengua: izquierda-derecha, arriba-abajo. Lo importante es observar cómo estos componentes externos de la escritura son construidos por el niño en una práctica permanente de escritura y confrontación con su maestro, sus compañeros y los materiales de lectura. Durante este proceso no es necesaria una instrucción sistemática de estos componentes para que el niño los construya (pág. 30).



Se desprende de la cita anterior que las inversiones y direcciones que tan comúnmente manifiestan los niños cuando escriben los números pueden ajustarse, progresivamente, al modelo cultural que impone la escritura matemática. Basta con una confrontación adecuada, sutilmente presentada por el docente.

Actividad 4: ¿Asigna el número como cardinal de un conjunto?

Se le presentan al niño varios conjuntos, con diferentes números de elementos (de los que reconoce perceptivamente), para que les asigne el cardinal respectivo.

Actividad 5: ¿Ordena los numerales, significativamente?

Esto es, ¿puede el niño comprender secuencias como:

4,6,8
2,5,8
1,3,5,7,9

referidas a conjuntos concretos o gráficos?

Actividad 6: ¿Comprende las relaciones aditivas entre los números (reversibilidad)?

Se averigua aquí la capacidad para "componer" y "descomponer" números, a través de adiciones y sustracciones.

Ejemplo:

Encuentre todas las adiciones con resultado 8.

Descomponga el 8 en: dos números, tres números, cuatro números...

8= 5+3; 8= 1+4+3,...

Movilización del esquema aditivo

Una vez el niño posee el esquema aditivo de la aritmética con los diez primeros números, es fundamental buscar que lo generalice de acuerdo con las exigencias de nuestra cultura. Una manera de lograrlo es a través de la siguiente organización conceptual:

Sumas con base 10

Se trata de ayudar a los niños para que comprendan que todas las sumas se refieren a los diez primeros números:

8+5 = 8+2+3
8+5 = 10+3
8+5 = 13 (una decena y tres unidades)

3. Hurtado, Rubén. Una propuesta constructivista para la enseñanza de la lectura y la escritura en niños de preescolar y primer grado de educación básica primaria. Medellín, Instituto de Educación no Formal Centro de Pedagogía Participativa, 1994.

Este esquema ayuda para que los niños puedan abandonar el conteo con los dedos, y para mejorar su capacidad de cálculo mental, siempre y cuando se les acompañe con las preguntas adecuadas para que piense en las acciones con los símbolos.

La interiorización de este esquema requiere que, previamente, el niño sea capaz de "componer" y "descomponer" cualquiera de los números del 2 al 10 en todas sus posibilidades ($5 = 2 + 3$ en el ejemplo) y de calcular la diferencia entre un número menor que 10 y el 10 (en el ejemplo, la diferencia entre 8 y 10). El orden de las preguntas por plantear a los niños para ayudarles en la interiorización del esquema puede ser el siguiente:

1. ¿Cuánto le falta al 8 para obtener 10?
2. ¿Cuánto queda, después de tomar del 5 lo que falta al 8?
3. 8 más 5 es 10 y?
4. $10 + 3 =?$

Inicialmente el niño puede necesitar mediadores concretos (grupos de objetos homogéneos) o gráficos, antes de efectuar la operación mentalmente.

Una vez adquirido cierto nivel de respuesta automática es fácil generalizar el esquema logrado.

Movilización hacia la generalización

Aparecen, aquí, varias posibilidades para la generalización como las siguientes:

1. Aplicando el esquema a unidades de diferente orden:

$80 + 50 = 130$ "ocho decenas más cinco decenas son trece decenas"

$800 + 500 = 1300$ "ocho cientos más cinco cientos son trece cientos"

$8000 + 5000 = 13000$ "ocho miles más cinco miles son trece miles"

2. Aplicando el esquema, iteractivamente, sobre unidades del mismo orden:

$18 + 5 = 20 + 3 = 23$; $38 + 5 = 40 + 3 = 43$; $78 + 5 = 80 + 3 = 83$

$180+50 = 200+30 = 230$; $380+50 = 400+30 = 430$; $780+50 = 800+30 = 830$

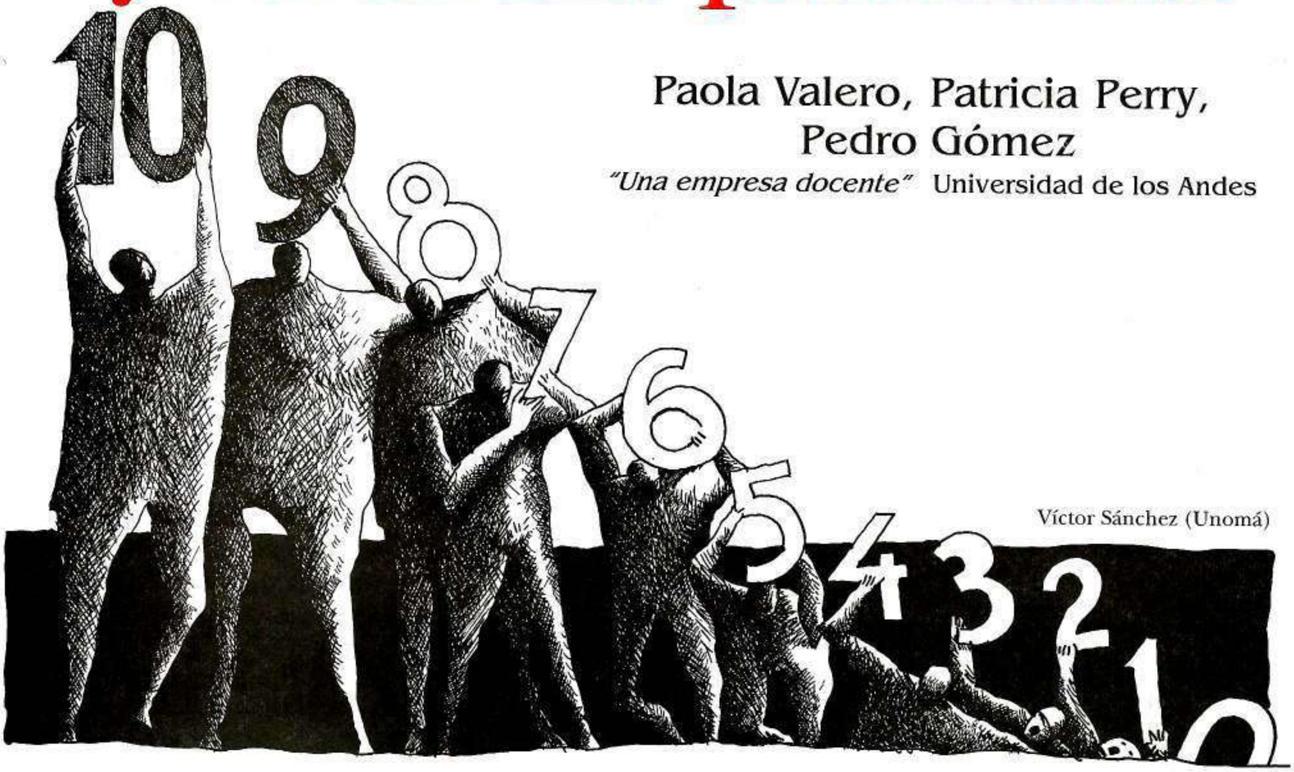
3. Realizando, mentalmente, los ejercicios anteriores.

El cálculo mental; ayuda a generalizar y aumenta la velocidad del pensamiento matemático, entre otras cosas, porque las operaciones ya no se realizan con la presencia de referentes materiales o gráficos, sino con los esquemas interiorizados de las relaciones simbólicas.

De una manera similar puede indagarse la comprensión de los esquemas de la multiplicación y de la división, y las posibilidades para generalizarlo❑

Educación matemática y desarrollo profesional

Paola Valero, Patricia Perry, Pedro Gómez
"Una empresa docente" Universidad de los Andes



Víctor Sánchez (Unomá)

En el contexto de reforma educativa que vive Colombia desde hace algunos años y, en especial, con la Ley General de Educación de 1994, el problema de la calidad de la educación se ha comenzado a ver como un eje articulador de muchos esfuerzos educativos y se ha convertido en el blanco de numerosos proyectos de investigación, debates y cursos de actualización de docentes y directivos. Dentro de esta preocupación, «una empresa docente», centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes, realizó entre enero de 1994 y julio de 1995 un proyecto de investigación-acción en el área específica de las matemáticas escolares. El proyecto MEN-EMA[1] inició la exploración de la problemática de la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje en la secundaria de los colegios colombianos a través de un estudio en diez colegios oficiales del Distrito Capital de Bogotá. Los objetivos de este proyecto eran, por un lado, generar unos primeros conocimientos de la problemática mencionada desde una perspectiva institucional y, por el otro, diseñar y aplicar un esquema de formación profesional para directivos docentes y profesores que influyera positivamente en la problemática de la calidad de la educación matemática en los diez colegios participantes.

Los resultados de este proyecto se han discutido ampliamente y a profundidad en diversos trabajos (Gómez y Perry, 1994; Perry *et al.*, 1995a; Perry *et al.*, 1995b). En este artículo se resaltarán algunos aportes del proyecto que, a nuestro juicio, son respuestas innovadoras para abordar el problema en cuestión. Se tratará el tema de la calidad de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y lo que él implica, desde el punto de vista de la institución educativa. A continuación se discutirá sobre la importancia de la

1. Financiado por la Fundación Corona y el Ministerio de Educación Nacional.

formación de profesores y directivos docentes en el mejoramiento de dicha calidad y se describirá el esquema desarrollado con los participantes en el proyecto MEN-EMA. Después se analizarán los impactos de este esquema de formación, tanto en las personas como en la estructura de la institución y finalmente se mencionarán las expectativas hacia el futuro.

La calidad de la educación matemática en la institución educativa

Cuando se habla del problema de las matemáticas escolares se tiende a hacer una asociación inmediata con algunas manifestaciones del problema como la alta deserción, la mortalidad y la repitencia en el área. Y como causa de estas manifestaciones se suele identificar exclusivamente a los estudiantes y a los profesores. A los primeros porque, según profesores y directivos, no gustan de las matemáticas, no aprenden, son perezosos y no quieren pensar. A los segundos porque, según estudiantes y directivos, no saben enseñar, son tradicionales exigentes y no transmiten un gusto por las matemáticas. Reducir el problema de la calidad de la educación matemática a estas manifestaciones y a su explicación por estos factores demuestra una visión de calidad centrada en los resultados de los estudiantes frente a unos niveles de logro determinados.

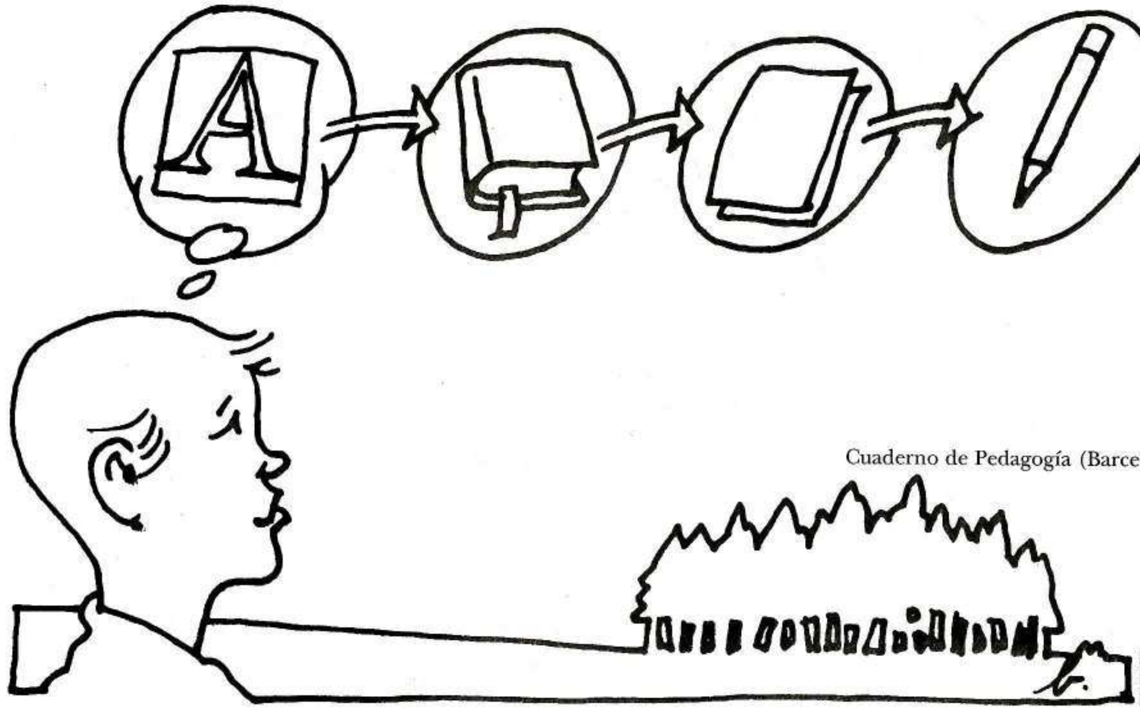
Sin embargo, el problema es mucho más profundo e involucra a muchos más elementos que los dos actores ya mencionados. La calidad de la educación matemática escolar hace referencia a la coherencia de una serie de factores dentro del sistema educativo, en especial dentro de la institución educativa, que llena «las expectativas de una sociedad y de sus más críticos exponentes» (Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo, 1994). Esta serie de factores incluye la calidad de los insumos materiales y financieros que entran al sistema, los agentes involucrados, los procesos, los ambientes y los productos medidos no sólo en términos de rendimiento de los estudiantes. Y su coherencia para el caso de la formación matemática se orienta hacia la construcción de la potencia matemática de los estudiantes. Esta potencia matemática denota la capacidad del estudiante para explorar, formular hipótesis, razonar lógicamente y resolver problemas, por medio del uso de herramientas matemáticas (NCTM, 1991, p. 5).

Esta definición de calidad amplía la visión tradicional de la problemática y abre la posibilidad de considerar el asunto como una realidad compleja, dinámica y diversa. El modelo del Sistema Institucional de la Educación Matemática (SIEM), que se ha construido para abordar la problemática, corresponde a una visión sobre lo que se considera importante en ella. Si bien se establecen unos elementos y las relaciones entre ellos, el modelo que resulta es un posible modelo[2] de los muchos que podrían delimitarse desde otras perspectivas. (Ver figura 1)

En una institución educativa entran en relación las actividades, valores, concepciones y conocimientos que, por un lado, tienen los directivos docentes (rector y jefe del departamento o área de matemáticas) y las que, por otro lado, sostienen los profesores, tanto como miembros de un grupo que comparte una cultura profesional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como individuos en su salón de clase. Los directivos, dado su

2. Nótese que los estudiantes no aparecen en este modelo, a pesar de ser centrales en el problema, puesto que en ellos, finalmente, se realiza la formación matemática del colegio. La justificación a este hecho se encuentra en que es más efectivo influir en los profesores como medio indirecto para incidir en los estudiantes. Además, la influencia que se ejerce en los profesores se realiza en aspectos como sus conocimientos, creencias y compromiso y, a través de éstos, en su práctica docente. Por esto, dentro de este modelo la práctica docente tampoco se considera como un elemento central.

Figura 1



Cuaderno de Pedagogía (Barcelona)

cargo, poseen un poder no sólo para ejecutar acciones, sino también para delegar responsabilidades y potenciar la actuación y toma de decisiones que los profesores puedan tener en su ejercicio docente. Los profesores, por su parte, cuentan con el marco de referencia que se establece al interior del grupo de profesores de matemáticas y que obedece a la manera como en ese grupo se tejen los significados y valores de la cultura profesional del grupo. Esta cultura hace referencia a las connotaciones que toman el diseño curricular, el desarrollo profesional y la colaboración entre los profesores que son miembros del grupo. A su vez, cada profesor interpreta ese marco de referencia y lo expresa en su práctica docente. En el ejercicio de la práctica docente intervienen las creencias del profesor sobre las matemáticas y su didáctica, sus conocimientos, tanto de matemáticas como de la didáctica de ellas, y su compromiso con todas las responsabilidades que su trabajo conlleva.

La formación de las personas

La pregunta clave de esta visión de la problemática frente a lo que sucede en un colegio donde se observan deficiencias en la calidad de la educación matemática está en cómo generar una dinámica institucional para promover un estado deseable de las relaciones entre los elementos relevantes del sistema. La respuesta está en lograr su potenciación a través del desarrollo de esquemas de formación profesional que fomenten la construcción de una actitud crítica con conciencia social, que le permita a la persona observar y analizar su práctica con el propósito de mejorarla para efectos de aportar a una mejor formación matemática del estudiante; y la construcción de una capacidad y responsabilidad multiplicadora que induzca a la persona a compartir sus experiencias, a aceptar la crítica de sus pares y mantener una actitud permanente de aporte al proceso de potenciación del sistema (Gómez y Valero, 1995).

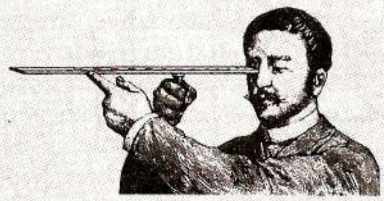
Por esta razón se propuso un esquema de capacitación innovador para los participantes en el proyecto. El primero, estuvo constituido por el rector y el jefe del departamento de matemáticas de secundaria de cada uno de los diez colegios oficiales seleccionados. El segundo, por dos profesores de matemáticas de cada uno de los colegios. En ambos grupos participaron, también, dos investigadores de «una empresa docente», quienes coordinaron las actividades realizadas. Directivos y profesores en sus respectivos grupos, vivieron la experiencia de realizar una investigación-acción. Los directivos de cada institución identificaron un aspecto relacionado con la problemática de las matemáticas en su colegio, aspecto sobre el cual tuvieron injerencia desde su rol de directivos y en el cual quisieran incidir. Para ese aspecto planificaron una acción específica tendiente a lograr un cambio, la llevaron a cabo, la observaron y determinaron los efectos que ella tuvo sobre el aspecto en cuestión.

Los profesores de cada institución —de manera individual o en grupo— seleccionaron un tema de alguno de los cursos que tenían a su cargo, tema que pudieran tratar máximo en tres horas de clase y cuya enseñanza quisieran mejorar en algún aspecto. Para dicho tema realizaron el correspondiente diseño y desarrollo curricular. Al terminar el proyecto, tanto profesores como directivos-docentes participaron en la presentación de resultados y en la producción de artículos sobre sus experiencias en la realización de pequeños proyectos de investigación-acción.

Los efectos en las personas

La experiencia que vivieron, tanto directivos docentes como profesores, en el desarrollo de pequeños proyectos de investigación-acción dentro de sus colegios tuvo los siguientes efectos en los participantes.

Para los directivos docentes el proceso implicó descubrir que son parte de un problema del cual se consideraba como únicos responsables a los profesores o a los estudiantes. Entender su capacidad de asumir un rol diferente al meramente administrativo y, en cambio, liderar y facilitar el trabajo de los otros miembros de la institución, en especial de los profesores de matemáticas, fue una oportunidad para que cambiaran su percepción de la complejidad de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro de sus instituciones. Además, la experiencia de investigación-acción les ofreció herramientas concretas para dinamizar el trabajo al interior de los colegios y poder realizar en ellos pequeños proyectos bien estructurados, factibles, evaluables y que se llevan a término.



La calidad de la educación matemática escolar hace referencia a la coherencia de una serie de factores dentro del sistema educativo, en especial dentro de la institución educativa, que llena «las expectativas de una sociedad y de sus más críticos exponentes» Esta serie de factores incluye la calidad de los insumos materiales y financieros que entran al sistema, los agentes involucrados, los procesos, los ambientes y los productos medidos no sólo en términos de rendimiento de los estudiantes

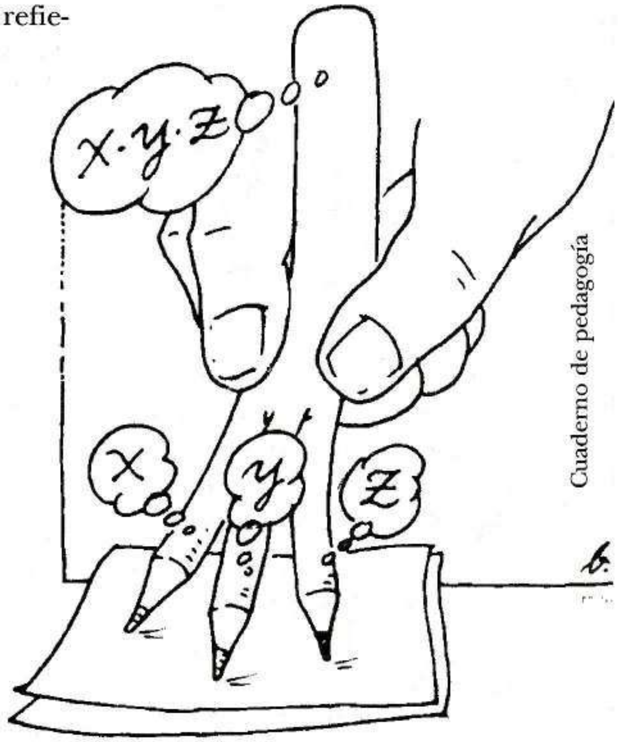
Para los profesores de matemáticas involucrados, la experiencia de la investigación-acción contribuyó en el cambio de su percepción con respecto a su ejercicio docente. Se dieron cuenta de la existencia de una disciplina profesional que practican, disciplina que ha construido una serie de conocimientos propios de los temas y dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta conciencia, mezclada con la oportunidad de proponer una actividad innovadora dentro del salón de clase, amplió la visión de los profesores frente a las causas de las dificultades de los estudiantes en matemáticas: el profesor, su actitud y sus creencias tienen gran parte en el asunto; el problema no es exclusivo de la «pereza» de los estudiantes. De manera similar a lo sucedido con los directivos docentes, los profesores también se apropiaron de una herramienta investigativa (la investigación-acción) que les permite realizar una práctica más reflexiva y dispuesta a la innovación crítica.

En general, la experiencia mostró que es posible comprometer a los profesores y directivos en esquemas de formación que exijan más trabajo y reflexión que los cursos de capacitación tradicionales. La apatía y poco interés que, supuestamente, caracteriza a los maestros del sector oficial pueden romperse y transformarse en una fuerza dinamizadora de la institución escolar cuando las personas se involucran en actividades no mecánicas y libres donde se ofrecen herramientas para la propia construcción de soluciones.

La dinamización de la institución en torno a las matemáticas

Este esquema de formación profesional tuvo un efecto no sólo en los actores o agentes involucrados, sino, también, en la estructura del Sistema Institu- cional de la Educación Matemática de los colegios participantes.

Al inicio del proyecto el papel que asumen, tanto rector como jefe de departamento es, en esencia, administrativo. Esto se refiere a que el contacto que establece el rector con los profesores, por medio del jefe de departamento, se centra en cuestiones como el seguimiento de programas y la revisión del cumplimiento de las labores docentes mínimas. Por esto, el rector tiene un gran peso en la institución como poder último de decisión de normas generales, pero entra poco en contacto con la problemática del área de matemáticas. Así, el papel del jefe de departamento es de bajo perfil y se limita a la transmisión, al grupo de profesores, de las propuestas del rector y viceversa. Su labor como coordinador de un grupo donde debería desarrollarse un trabajo de diseño curricular, de desarrollo profesoral y de colaboración es mínima. La ausencia de un liderazgo activo del jefe hace del departamento un espacio vacío de una comunidad de profesores profesionales interesados por su desempeño docente. Al interior de este grupo de profesores se vive una cultura donde el desarrollo profesional se basa en esquemas tradicionales de asistencia a cursos de capacitación. En estos se refuerza la idea de que la capacitación se realiza, esencialmente, a través de la transmisión del conocimiento, y que el trabajo cotidiano y colectivo dentro de la institución no es apropiado para ello. Por esta razón no se considera importante el trabajo de desarrollo curricular colectivo. Igualmente, los profesores como individuos, con su compromiso y sus creencias y conocimientos tradicionales sobre lo que son las matemáticas y su didáctica, contribuyen a reforzar la situación de aislamiento individual y de poca colaboración en el grupo.



Cuaderno de pedagogía

Gracias a las características del esquema de desarrollo profesional que se puso en práctica, se presentaron algunos cambios en los elementos y sus interrelaciones, cambios que de ninguna manera se asumen como estables ni definitivos. El rector se dio cuenta que debe asumir un rol distinto al puramente adminsitrativo y comenzó a establecer una relación académica con el jefe del departamento de matemáticas. El rector se convirtió en un agente dinamizador de las relaciones entre los profesores como grupo, ya que promovió la colaboración al abrir un espacio institucio- nal para el intercambio. Sin embargo, el rol del rector fue protagónico y continuó opacando la importancia de la actuación del jefe del departamento. Este, por su parte, comenzó a tener una influencia positiva en la construcción de una cultura profesional en el grupo de profesores a través del reconocimiento de su responsabilidad en la construcción colectiva de una propuesta de diseño curricular del área de matemáticas. La dinámica al interior del grupo de profesores influyó en las visiones individuales y se generó una serie de cuestionamientos sobre los conocimientos y, en especial, sobre las creencias del profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, también se aumentó el compromiso del profesor con su ejercicio docente y con la participación en la cultura profesional del grupo de profesores de matemáticas.

Estos cambios obedecieron a que el esquema de formación profesional desarrollado influyó con mayor fuerza en cinco de los elementos y modificó, a través de ellos, el tejido de las relaciones estructurales del SIEM en su estado inicial. Tales elementos son: los roles del rector, el rol del jefe del departamento, la colaboración entre profesores, la creencia del profesor y el compromiso del profesor con su práctica docente. Haber influido en ellos, por medio de un esquema de formación abierto que permitía explorar las necesidades y problemas propios de cada colegio con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas fue una forma efectiva de generar dentro de las instituciones un estado de cuestionamiento y de inicio de cambio.

Hacia el futuro

Los resultados del proyecto MEN-EMA, tanto en lo relacionado con el esquema de formación profesional como en lo atinente a la generación de conocimientos sobre la problemática de la calidad de la educación matemática en los colegios de Colombia, abren bastantes expectativas de trabajo hacia el futuro. Por un lado, «una empresa docente» continuará su investigación en este campo con el proyecto PRIME que, en un lapso aproximadamente de ocho años, pretende conformar una red de instituciones de educación superior y colegios interesados por trabajar en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva institucional.

La potencialidad de acción e investigación más grande que se vislumbra se centra en que se están iniciando a construir las bases de un campo de investigación que muestra una amplitud atractiva para abordar problemas claves en el mejoramiento de la calidad de la educación matemática de los colegios del país. Como se ha dicho anteriormente, el modelo del Sistema Institucional de la Educación Matemática es uno de los muchos posibles de la realidad de las matemáticas escolares en la institución educativa. Otras miradas al interior de la institución y los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas podrían ser muy útiles en la comprensión a profundidad de la calidad de la formación matemática del estudiantado colombiano❑

Bibliografía

Gómez, P. y Perry, P. (1994). Proyecto MEN-EMA. *Una investigación sobre la profundidad de las matemáticas en los colegios oficiales del Distrito Capital.* Bogotá: «Una Empresa Docente», Informe final del proyecto, disertación sin publicar.

Gómez, P. Y Valero, P. (1995). La potenciación del sistema de educación matemática en Colombia. En P. Gómez *et. al. Aportes de «Una Empresa Docente» a la IX CIAEM.* Bogotá.

Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo (1994), *Colombia: al filo de la oportunidad.* Bogotá, Presidencia de la República.

NCTM (1991), *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática,* Sevilla, SAEM, Thales.

Perry, P; Gómez, P. y Valero, P. (1995a), Proyecto MEN-EMA: exploración de la problemática de las matemáticas escolares en colegios oficiales de Bogotá". En P. Gómez *et al. Aportes de «Una Empresa Docente»* a la IX CIAEM, Bogotá.

Perry, P; Gómez, P. y Valero, P. (1995b). *El Sistema Institucional de la Educación Matemática. Una aproximación a la problemática de la calidad de las matemáticas escolares en Colombia,* Bogotá, «Una Empresa docente» (en prensa).

Cuadernos de Pedagogía (Barcelona)

La construcción del concepto de área*

Gema Galindo de Rojas
Myrian Ferro

Profesoras de Matemática del nivel de Primaria del Colegio Champagnat de Santafé de Bogotá

En concordancia con los supuestos en los que se fundamenta la propuesta *Descubro la Matemática* se asume que el concepto del área de una figura es construido por el niño a través de un proceso que se prolonga por un espacio de tiempo, que se extiende alrededor de 3 años. El niño pasa de comparaciones directas del tamaño de objetos planos de forma geométrica sencilla, por ejemplo, de forma rectangular a comparaciones basadas en transformaciones de las figuras. Estas últimas comparaciones demandan del niño la construcción de nociones tales como aditividad del área y la invarianza de ésta a pesar de las transformaciones de tipo rígido.

Como consecuencia de lo anterior se considera que la enseñanza del concepto de área no puede reducirse a desarrollar en los niños las habilidades y conocimientos necesarios para aplicar las fórmulas que requieren su cálculo, como tampoco al estudio de los sistemas de unidades de medidas que se utilizan para poderla cuantificar. Estos conocimientos son, apenas, una parte del proceso de construcción de

* Esta experiencia se realiza en el desarrollo de la propuesta **Descubro la Matemática** que se viene implementando en el Colegio Champagnat de Bogotá. bajo la dirección pedagógica de Jorge Castaño García, a quien agradecemos sus orientaciones para la elaboración del este artículo.

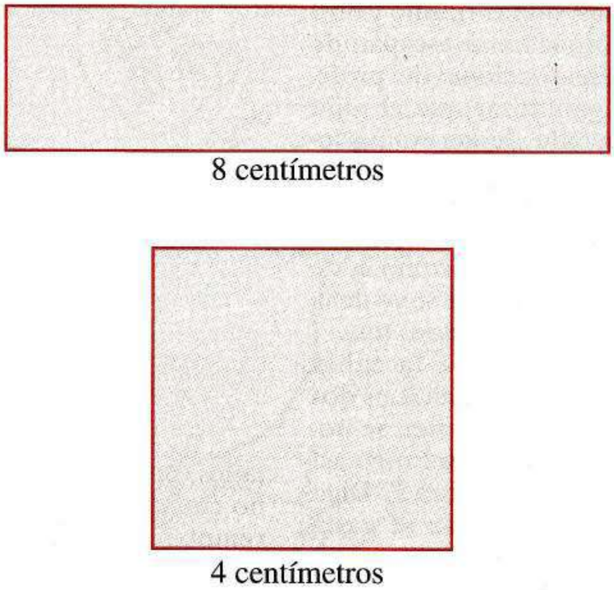
este concepto, pero no son los únicos ni por los cuales conviene empezar al trabajar con los niños.

En este artículo se describe la experiencia que en este campo se ha realizado en el colegio. Por razones de espacio se hará una descripción más amplia de lo que se realiza en el grado tercero, que es el punto de partida para ayudar a sistematizar esta noción en los niños, para que sirvan de referencia al lector, en los demás grados la descripción se hará más global.

Aunque se reconoce que las evaluaciones perceptivas que el niño hace en preescolar y los primeros años de la primaria, cuando a propósito de muchas acciones se ve enfrentado de manera "espontánea" a comparar el tamaño de dos superficies, por ejemplo, dos pedazos de papel o dos pedazos de tela, son ya un acercamiento a lo que años después va a ser el concepto de área, es en el grado tercero, como ya se dijo, en el que se asume como propósito explícito ayudar al niño a sistematizar este concepto. En este grado los niños se enfrentan a problemas como: se tienen dos pedazos de cartón, o de madera, o de cualquier otro material, uno tiene una forma rectangular (8 cm de base y 2 cm de altura, por ejemplo) y el otro en forma cuadrangular (de 4 cm de lado) y se desea saber si una de ellas tiene más cartón, madera, etc., o si tienen la misma cantidad.

Algunos niños resuelven la pregunta desde una inspección simplemente perceptiva: "Se gasta más tela en la larga porque es más amplia y entonces se gasta más tela en la larga", otros ensayan resolver el problema midiendo el perímetro: "La larga es más grande porque lo largo es de 8 cm y el cuadrado lo largo es 4 cm

Figura 1



y si sumamos todo lo de la tabla larga nos da 20 ..., 8+8+2+2 = 20, en cambio en esta es 4+4+4+4 = 16" por lo tanto la larga es más grande"; otros , muy pocos , —a veces en este grado no se encuentra ninguno—; buscan superponer los dos pedazos para determinar si con uno pueden recubrir el otro: "yo lo haría colocando tela a lo largo si miden como en el dibujo,... yo lo haría cortando tela del cuadrado largo (el rectángulo) entonces los dos pedazos los pongo en el otro, y se pone la misma cantidad". (Figura 1).

A los niños que se ubican en los grupos primero y segundo se les cuestiona para que vean la necesidad de recurrir a un procedimiento que supere las evaluaciones basadas en lo perceptivo y el perímetro.

Hay varias situaciones que pueden problematizar al niño. Una puede ser imaginar una situación de tienda, en la que los niños deben ir a comprar la tela necesaria para forrar una tabla de forma rectangular de 2cm x 16 cm, se fija un precio a una tira de 2cm x 4cm. Los niños deben decidir cuántos cm de tira necesitan comprar. A algunos niños se les vende la tira completa de 2 cm x 16 cm, de tal forma que sólo tengan que colocar la tela sobre la tabla, a otros se les vende en 2 pedazos de 2cm x 8cm, a otros 4 pedazos de 2cm x 4cm, de tal forma que necesiten colocar los pedazos comprados, uno después del otro, para recubrir la superficie de la tabla. ¿Alguno de los tres niños compró más tela? ¿pagaron lo mismo por la tela comprada? Si se da el caso de que se considera que alguno compró más tela, se cuestiona: ¿entonces por qué usted pagó lo mismo que él? El precio se convierte en un referente para comparar la cantidad de tela comprada. ¿Todos pueden forrar la tabla? ¿a alguno le faltó o le sobró tela? Una vez que se reconoce que se compra la misma cantidad de tela y que todos la utilizan para recubrir la tabla se disponen los pedazos de tela comprados en el segundo y tercer caso, uno al lado del otro, uniéndolos por los lados de 8 cm y 4 cm, respectivamente, y no por el de 2 cm como se venía haciendo, para volver a preguntar: ¿quién compró más tela? y repetir los cuestionamientos.

De todas formas en uno y otro caso los niños no se escapan de las problematizaciones del profesor para garantizar que el niño se ha liberado de las evaluaciones basadas en la percepción.

Se formulan cuestionamientos como estos:

Se tiene una tabla como la de la figura 2, la cara que se ve de la tabla se desea forrar con tela.

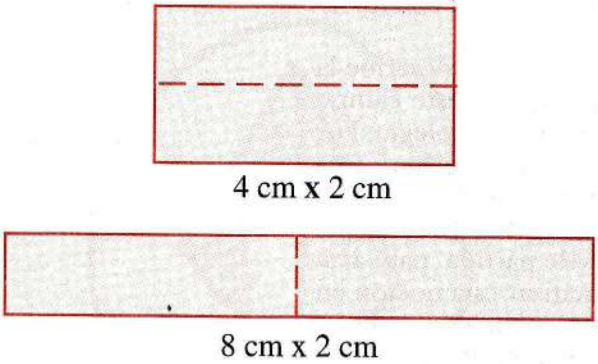
Después se corta la tabla como lo indica la línea. Los dos pedazos que se obtienen se ponen el uno al lado del otro así como lo indica la figura 2. Diga si en la primera tabla se gasta más, menos o la misma cantidad de tela que en la segunda.

Empiezan a aparecer argumentos en los que hacen una multiplicación lógica de las dimensiones (largo y ancho) como corrigiéndose ellos mismos lo que la percepción les está diciendo: "No se gasta más tela porque la tabla se puede alargar pero al mismo tiempo pierde su ancho, porque a la tabla no se le agrega si no se corta".

Como otras de las ideas son hacer la evaluación de la cantidad de tela mediante el perímetro, el profesor propone problemas que le ayuden a los niños a empezar en diferencias el significado de las dos preguntas "si se van a forrar las tablas ¿en cuál se gasta más?, y "si se desea poner cinta alrededor de la tabla, ¿en cuál se gasta más? De nuevo se presentan situaciones de tienda en la que hay que comprar la tela y la cinta.

A medida que se avanza en la resolución de las situaciones descritas se busca que los niños puedan resolver el problema de la comparación de área en el campo de la representación gráfica. Son problemas similares a los citados, pero en este caso el niño no cuenta con los objetos; en su remplazo tiene figuras dibujadas en el papel, él debe imaginar los cortes y representarlos gráficamente. En este momento se trata que, mediante anticipaciones, el niño se represente las acciones hechas anteriormente.

Figura 2



Siguiendo en la misma línea de los problemas que se vienen trabajando se enfrenta a los niños con situaciones que supongan transformaciones más fuertes de la figura base. A un rectángulo se le hacen cortes por sus diagonales para obtener cuatro pedazos de forma triangular, se forma una nueva figura con todos ellos.

Estos problemas son resueltos en dos niveles, primero, haciendo la figura en cartulina, realizando los cortes y formando la nueva, y después trabajando a nivel gráfico, para, como ya se señaló, obligar al niño a anticipar los movimientos necesarios para obtener la figura transformada.. Un apoyo útil es el trangram[1].

También se proponen problemas que tienen la intención de ofrecer a los niños un significado ligado a contenidos empíricos, tales como: Se desea pintar el borde exterior de la cancha de baloncesto, el obrero cobra $100 por cada metro pintado, ¿cuánto se le debe pagar? Los niños van a la cancha, toman las medidas y hacen sus cálculos. Se discuten los procedimientos seguidos, efectivamente aparecen formas distintas de hacerlo.

Incluso, en algunos casos se llega a formular problemas como delimitar en el patio dos terrenos de forma rectangular para formular a los niños problemas como: Se desea pavimentar estos terrenos, ¿en cuál se va a gastar más cemento? Este problema comporta una dificultad adicional a los niños, ya no pueden mover los terrenos, tampoco cuentan, de partida, con una representación gráfica de ellos. En algunos casos el profesor interviene para sugerir a los niños que hagan dibujos a escala con el fin de facilitar las comparaciones.

1. Sin embargo, conviene aclarar que el trangram por sí mismo no agota las experiencias que el niño debe realizar para anticipar los movimientos necesarios para lograr una determinada transformación. La construccion de figuras mediante el trangram se puede hacer soportándose en apoyos perceptivos, en la constitución de buenas formas y, además, se pueden realizar basados en procesos de ensayo y error.

En síntesis, la intervención en tercer grado está orientada a que los niños desechen como métodos válidos para comparar los "tamaños" de dos figuras rectangulares, el de la simple percepción y el del perímetro. Efectivamente, la gran mayoría de los niños de este grado empieza a descartar estos dos procedimientos, sin embargo, otros, aunque pocos, oscilan entre estos métodos y el de la comparación directa. Algunos avanzarán a cuarto sin haber logrado consolidar estas elaboraciones.

En el grado cuarto se retoma el trabajo del año anterior partiendo de problemas semejantes a los ya resueltos pero, cada vez más, se exige al niño que para hacer la comparación abandone el método de comparación directa y busque uno de comparación indirecta. Se sugiere al niño recubrir la superficie de ambos pedazos con otros más pequeños y que cuente en cada caso cuántos de éstos se necesitan.

Aquí hay dos problemas que debe resolver el niño:

• ¿ Cuál debe ser la forma y dimensiones del pedazo que se va a tomar como unidad? Se ensaya con rectángulos y con cuadrados hasta que el niño evidencie la funcionalidad de una forma cuadrada.

• El tamaño del cuadrado unidad debe corresponder con las dimensiones de la figura que se va a comparar. Si las figuras son pequeñas, lo más práctico es tomar como unidad de comparación un cuadrado de un cm de lado (se llama así y no un centímetro cuadrado.), si es más grande, quizá sirva la de un metro, etc.).

Uno de los tantos problemas que se formulan es: Un albañil desea saber si en alguna de las

Cuadernos de Pedagogía (Barcelona)

dos paredes A y B gasta más o la misma cantidad de baldosas (se presenta la gráfica de dos paredes, una, la A, de forma cuadrada de 2 m. de lado y la B de forma rectangular, cuyas medidas son 4 m largo y 1 m de ancho). Se indica que las baldosas son de forma cuadrada y miden 20 cm. de lado.

Una de las soluciones ofrecidas es: " Para la pared A se necesitan 100 baldosas porque para dos metros se necesitan 10 baldosas. 10 + 10 + ... +10 =100; para la pared B se necesitan 100 porque en 4 metros se necesitan 20 baldosas y un metro son 5 baldosas. 20+20+20+20+20 = 100." Este niño se ayuda con un gráfico, poniendo hileras de baldosas. Prácticamente tiene que ejecutar la acción del albañil para después contar las baldosas, su avance está en que no tiene que hacerlo una por una, sino por "hileradas".

A medida que se avanza en estas construcciones el niño debe enfrentar un nuevo problema que supone un gran progreso en su proceso de construcción del concepto de área: encontrar un procedimiento rápido para contar la cantidad de cuadros que se necesitan para recubrir totalmente una superficie. Ya no se pueden contar uno a uno, aparece, entonces, el método de conteo aditivo, ir sumando los de cada fila (o columna); y finalmente aparece (o si es necesario el profesor lo sugiere) un procedimiento multiplicativo (la cantidad de cuadros de una fila por los de una columna) de nuevo aquí se tiene el cuidado de hacer que el niño resuelva problemas a nivel de representaciones gráficas.

A partir de este momento la acción del profesor está ligada a ayudar a reconocer que este método no funciona muy bien cuando se trata de figuras que tienen lados inclinados. ¿Cómo hacer en el caso del triángulo? Los primeros intentos de los niños consisten en arreglárselas contando los cuadros y completando uno con dos o más incompletos.

Igual que en el grado anterior se presentan variados problemas con contenidos diferentes en los que los niños deben identificar que lo que se les pide es calcular el "área", además de distinguir lo de las situaciones en las que deban calcular el perímetro.

Para quinto quedan dos problemas básicos:

• Abandonar la idea de representarse el cálculo del área de un rectángulo como el conteo de los cuadros que caben en el interior, para sustituirla como el cálculo de la multiplicación de la dimensión de su altura por la de su base.

• Y apoyado en lo anterior, y otras ideas que más adelante se señalan, abandonar el procedimiento de completar los cuadros incompletos en el caso de figuras con lados oblicuos.

En el primer caso, se exige a los niños que traten de anticipar cuántos cuadros caben en el rectángulo sin necesidad de hacer el dibujo sino a partir de las dimensiones dadas. Algunos niños logran hacerlo sin que el profesor lo sugiera, es más, algunos ya lo venían haciendo desde cuarto, en este caso el profesor se apoya en ese logro para que intercambien ideas y lograr que todos lleguen al método deseado. Se cambian las unidades de las dimensiones de los lados, unas veces son metros, otras en centímetros, incluso se presentan las medidas de los lados mediante números compuestos, (m y cm., o cm y mm, etc.). Paralelamente a este trabajo el niño deberá sustituir su idea de cuadros de unidad con los conceptos de metro cuadrado, centímetro cuadrado, etc.

Siempre se ha considerado dentro de la experiencia que el paso de representarse el área como la cantidad de cuadros de unidad, al cálculo a partir de las dimensiones de la base y la altura supone un salto de lo discreto a lo continuo, para lograr esto el interior de una figura no puede ser pensado como la cantidad de cuadros sino como una superficie continua. Por eso, paralelamente a este trabajo, se considera necesario que el niño aborde el problema de representarse una superficie como constituida por infinitos puntos. En este artículo no se puede describir este proceso. Sólo señala para mostrar cómo el concepto de área está ligado a adquisiciones de nuevos niveles de representación del espacio.

La segunda idea, la de calcular los cuadros de figuras con lados oblicuos, supone un recurso que encierra ideas fundamentales en el proceso de adquisición del concepto de área. Siendo consciente el niño de que el método de completar cuadros es apenas una aproximación, se hace necesario encontrar un método exacto. Este método supone hacer transformaciones a las figuras con lados oblicuos para obtener rectángulos y así encontrar cuadros completos. Claro que este proceso no será posible si a estas alturas el niño no ha construido los dos esquemas lógicos básicos a que se hizo referencia al iniciar este artículo: la aditividad de las áreas y su invarianza a pesar de las transformaciones rígidas.

Un procedimiento, como el señalado arriba, exige de los niños desarrollar una gran capacidad de hacer transformaciones a una figura para obtener rectángulos. Si el triángulo es rectángulo se puede obtener un rectángulo si se utilizan dos de estos triángulos. Si es isósceles se puede hacer un corte, por la altura que cae sobre el lado que no tiene su igual. Si es escaleno, la transformación no es tan inmediata, sin embargo, después de algunos intentos los niños terminan encontrando un método para hacerlo.

Lo anterior demanda de los niños abundantes acciones físicas que supongan hacer transformaciones a una figura para lograr una nueva. Para esto se refuerza con el juego del tangram, pero buscando en este grado que el niño pueda anticipar los movimientos y transformaciones que debe hacer para lograr una figura dada.

Explorar figuras (hacer traslaciones, rotaciones y reflexiones), allí despliegan su creatividad. Ser parte del juego libre, después se pide hacer figuras que correspondan a modelos presentados, luego se pide construír figuras geométricas. También se pide que a partir de una figura geométrica dada, se construya otra determinada. Pero aquí no se trata solamente de hacer figuras, sino de ser capaz de indicar las dimensiones de la nueva figura a partir de la anterior y de las transformaciones que se hicieron.

En algunos casos las respuestas de los niños a tareas como las indicadas es inmediata, pero para la gran mayoría es una pregunta que los mantiene ocupados por largo rato, tratando de imaginar la transformación necesaria y de encontrar las medidas de la nueva figura. Algunos, muy pocos, tienen que regresarse a la acción física, (recortar la figura y hacer los movimientos necesarios), pero de todas maneras ellos tienen que explicar las transformaciones hechas, como forma de ayudarles a adquirir conciencia de los resultados que producen los movimientos efectuados.

El propósito fijado para quinto es lograr que los niños puedan calcular el área de figuras como triángulos, paralelogramos, rombos, etc., mediante el cálculo del área del rectángulo obtenido al ser transformadas.

Se aplaza la aparición del cálculo de las áreas mediante fórmulas hasta sexto grado y aún allí al niño no se le desprende totalmente de la necesidad de estas transformaciones. Es en séptimo grado cuando se completa el conocimiento de las fórmulas.

Tal como se había señalado al comienzo del artículo, el proceso de construcción del concepto de área es complejo y supera por mucho el simple aprendizaje de fórmulas. El niño debe ir construyendo lentamente este concepto y otros que se vinculan en forma más o menos directa, la escuela debe ofrecerle muchas experiencias en contextos variados para que acceda a ellos ❑

Errores en Algebra

Un estudio exploratorio en estudiantes de primer semestre de universidad

Gloria García O.
Leonor Camargo U.
Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional

Introducción

Durante los diez últimos años, el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas es una de las preocupaciones centrales de la Educación Matemática (Radaz, 1980; Movshovitz N. Zaslavsky, 1987; Rico, 1989). La investigación ha mostrado que los errores forman parte de la producción de los alumnos, no son accidentales y obedecen a diferentes causas. Brousseau (1983), Tall (1989) y Kieran (1989) desde diferentes perspectivas, consideran que los errores que son constantes y resistentes son por lo general manifestaciones de conocimientos que son eficientes en un dominio matemático (por ejemplo, en la Aritmética) pero que se convierten en ineficientes cuando se aplican a otro dominio (Algebra). En particular los estudios sobre errores en álgebra —considerada como una aritmética generalizada— (Both 1987, Kücheman 1981, Kieran-Filloy, 1989; Kieran, 1990; Tall, 1990, Herscovics 1992) ha puesto de manifiesto que se deben a aspectos como: naturaleza y significado de las letras, traslaciones de significados aritméticos (igual, como resultado de una acción), uso inapropiado de reglas de procedimiento, etc.

A partir de la preocupación por el sin número de errores que presentan los estudiantes de la asignatura "Fundamentos de Matemáticas 01" para estudiantes del primer semestre de la facultad de Ciencias y Tecnología (Universidad Pedagógica Nacional). Como profesoras de estos cursos, hemos elaborado un estudio de carácter exploratorio con la finalidad de analizar la naturaleza de los errores cometidos por los estudiantes desde la perspectiva del conocimiento algebraico e incorporar su sentido positivo a la reflexión de la enseñanza porque además de ayudar al profesor a comprender los procesos involucrados en el aprendizaje son susceptibles de tratamiento didáctico.

Para la descripción del estudio presentamos en primer lugar un esbozo del marco de referencia, a continuación se categorizan los errores encontrados y finalmente se hacen algunas recomendaciones.

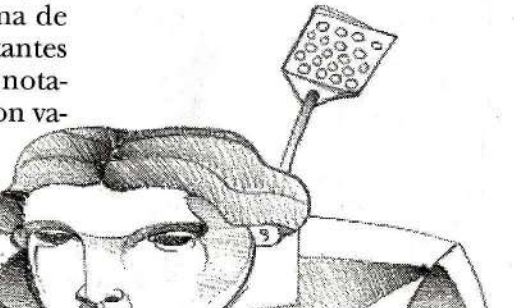
Sistemas simbólicos y matemática

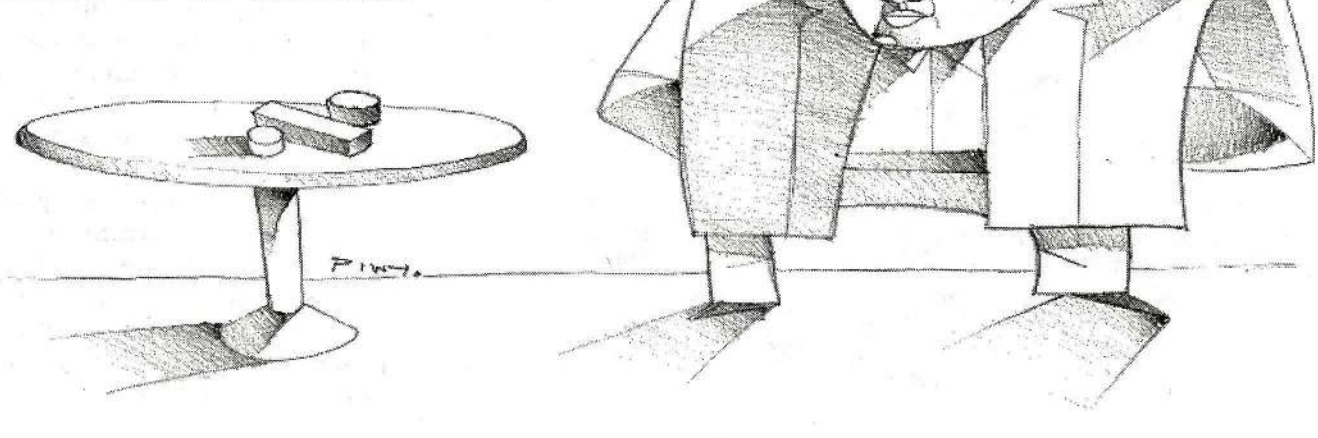
Kaput, Goldin y Glaserfeld (1986) proponen analizar la construcción del conocimiento matemático y su construcción individual desde la Teoría de la Representación. Kaput designa a la Matemática como la ciencia de las estructuras significantes, su tarea básica es la representación de una estructura (abstracta o idealizada) en otra. Sus representaciones por tener el carácter de arbitrarias y ser dependientes de convenios culturales son simbólicas. Los Sistemas Simbólicos matemáticos están conformados por un campo de referencia, un esquema simbólico y una relación entre ellos. El campo de referencia está asociado a una estructura que dota de significado al sistema, es su semántica; el esquema simbólico está conformado por caracteres (alfanuméricos, gráficos...) y reglas de combinación para operar, se genera la sintaxis coordinada por el campo de referencia. Caracteres y sintaxis se pueden extender y desarrollar más allá de su campo de referencia original. Por ejemplo, el álgebra como aritmética generalizada utiliza un esquema simbólico donde sus caracteres son letras y su sintaxis proviene en gran parte de propiedades de la aritmética tales como asociativa (adición y producto), conmutativa (adición y producto) y la distributiva, su reversa (factorización) es una de las propiedades más importantes para esta álgebra. Pero, sus notaciones obligan a trabajar con variables. Estas características determinan que "no habría" un álgebra, sino álgebras como lo propone el doctor Carlos E. Vasco (1989), álgebra de conjuntos, álgebra de funciones.

Si se considera al álgebra como un sistema simbólico, su comprensión y uso implica: interpretar sistemas notacionales y sintaxis; interpretar traslaciones sintácticas y notacionales que se suceden entre los sistemas simbólicos de las matemáticas y sus traslaciones a sistemas científicos no matemáticos (científicos, sociales, culturales).

Categorías y descripción de errores

Los objetivos de la asignatura Matemáticas 01 son: profundizar en el álgebra numérica y en el álgebra de funciones y establecer traslaciones a los sistemas científicos. Con este planteamiento concluimos, que los errores comunes cometidos





por un amplio número de estudiantes pueden ser atribuidos a:

- Cambios notacionales dentro de los sistemas simbólicos de las matemáticas y por traslación a sistemas de las ciencias.
- Sobre generalización de una sintaxis a otros campos de referencia.
- Traslación entre sistemas simbólicos matemáticos y sistemas científicos.
- Cabe señalar que los errores han sido recogidos durante tres semestres (primer y segundo semestre de 1994 y primer semestre de 1995). Cada grupo está constituido por un promedio de 24 alumnos.

a. Cambios notacionales

Algunas notaciones matemáticas ponen de manifiesto el significado estructural como las expresiones de funciones polinomiales y funciones trascendentes. Pero, el cambio de posición de la variable, *base a exponente* entre funciones polinómicas y exponenciales, o nombres (seno, logaritmo) conlleva a errores como:

$$y=a^x,$$

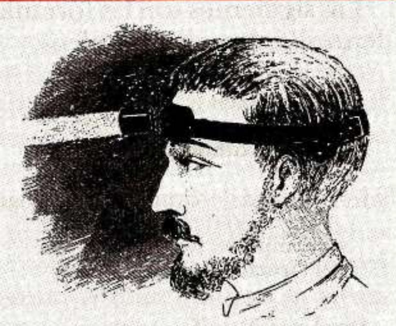
considerar que la variable es la base y el exponente, u,

homologarla con la notación de $y=x^n$

La notación de funciones trigonométricas igualmente es causante de errores como:

$$\text{sen}(-x) = \text{sen}\, {-x} \quad \text{o} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

La naturaleza de estos errores procede de extensiones de la notación concatenada aritmética (cada lugar un valor). En las dos situaciones, se evidencia la no consolidación del significado de la regla que caracteriza a cada una de estas funciones.



Si se considera al álgebra como un sistema simbólico, su comprensión y uso implica: interpretar sistemas notacionales y sintaxis; interpretar traslaciones sintácticas y notacionales que se suceden entre los sistemas simbólicos de las matemáticas y sus traslaciones a sistemas científicos no matemáticos (científicos, sociales, culturales).

El cambio de notaciones a los sistemas científicos como cuando en la expresión:

T= k.p -a, (1), se debe despejar a p siendo T= °K, p = presión; K = cte, conlleva, también, a una aplicación incorrecta de la sintaxis algebraica como:

$$p = \frac{k}{T} - a \quad \text{o} \quad p = \frac{k-a}{T}$$

Aquí, el uso de las mismas letras que siempre representan variables en álgebra x, y, constantes a, b, c, y la restricción a trabajar sólo con expresiones de la forma y= mx+b, por ejemplo, conduce a confundir en expresiones de la forma 1, las reglas de procedimiento. Igualmente estos errores pueden proceder de procesos de sustitución en el álgebra, donde se memorizan reglas como:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

pero no se trabaja sobre sustituciones más complejas que a su vez son variables como por ejemplo:

$$a= u+v \qquad b= t-r$$

b. Generalización de sintaxis

La extensión de propiedades sintácticas aritméticas, del álgebra numérica o del álgebra de funciones produce errores pero, al mismo tiempo puede mostrar que no se comprende la sintaxis que se extiende. Errores como:

$$\frac{5b+3c}{20b+12c} = \frac{5b}{20b} + \frac{3c}{12c} = \frac{1}{2} \quad \text{o}$$

$$\frac{\text{sen}4x + \text{sen}2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{\text{sen}4x}{\cos 4x} + \frac{\text{sen}2x}{\cos 2x}$$

$$= \tan 4x + \tan 2x$$

proceden del significado del igual en la aritmética: resultado de una acción. La necesidad de "reducción" del signo igual en la aritmética es reforzada en la enseñanza del álgebra pues cadenas de ejercicios, sobre todo en "los casos de factorización" acentúan el significado.

El sentido de "reducción" es también amplificado a la resolución de ecuaciones como:

$$2\,\text{sen}^2 x - \text{sen}\, x = 1$$

$$\text{sen}\, x\,(2\text{sen}x-1)= 1$$

$$2\text{sen}x-1 = \frac{1}{\text{sen}\, x}$$

$$2\,\text{sen}x\, \frac{1}{\text{sen}\, x} + 1$$

$$\text{sen}x = \frac{1 + \text{sen}\, x}{2\,\text{sen}\, x}$$

$$\text{sen}x = \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}\, x}{\text{sen}\, x}$$

$$\text{sen}\, x = 1/2 + 1$$

$$\text{sen}\, x = 3/2$$

en los diferentes pasos persigue simplificar para encontrar el valor numérico.

La extensión de la sintaxis a nuevos campos como en:

$\log a + \log b = \log (a + b)$

procede de la extensión de reglas como $x + bx = x(a+b)$. Igualmente errores como:

$\operatorname{sen}(\alpha + \operatorname{sen}\beta) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$ o

$2 \operatorname{sen}x \cos x = 2 \operatorname{sen}x\ 2 \cos x$

se deben a la extensión de la propiedad distributiva.

Otro error que encontramos con frecuencia es la generalización de métodos o fórmulas de solución como en:

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}x - 1 = 0 \quad ,$$

$$X = \frac{1 \pm 1 = 8}{4}, \quad X_1 = 1, X_2 = -1/2$$

A través de la extensión de la "fórmula" se trata de cubrir el vacío de comprensión del nuevo campo referencial.

c. Traslación entre sistemas matemáticos y sistemas científicos

Este tipo de errores se encuentra cuando se utilizan las funciones para modelar matemáticamente fenómenos de variación en los sistemas científicos, su uso demanda: comprensión de variable en su pleno sentido de variabilidad; interpretar la dependencia que identifica la expresión funcional y la semántica de la expresión funcional y la de cada una de "notaciones" que intervienen en la expresión. Por ejemplo, la base en una función exponencial determina el factor de crecimiento. En situaciones como:

Las siguientes son las fórmulas de tres fármacos hipnóticos:

Triazolen, $y = A.(0.84)^x$
Nitrazepan, $y = A.(0.97)^x$
Methoexithone, $y = A.(0.5)^x$

Si y = cantidad de fármaco en la sangre
A= tamaño de la dosis inicial
x= tiempo en horas desde que el fármaco llega a la sangre

Si el médico formula a un paciente insomne una dosis inicial de 4 mgr, ¿cuál de los fármacos será aconsejable, si el paciente no puede estar somnoliento durante todo el día siguiente? (Use la calculadora)

(Schell Center for Mathematical Education, 1990)

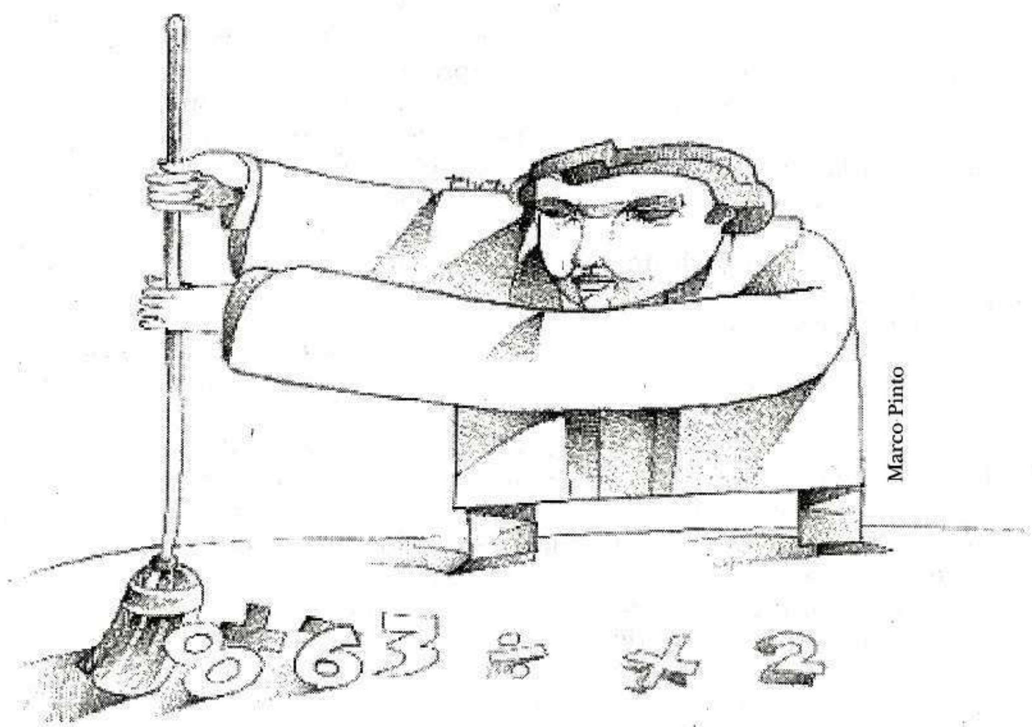
Errores como:

$4\text{mgr}\ (0.84)^x = 1$, hora, o,
$y = 4(0.44)^x$, *la dosis desaparece cuando* $x = 1308$, *o*,
$y = 4(0.86)^x = 3.88$ *mgr, desaparece*

proceden de ver a las funciones en su carácter restringido de fórmulas, (dado el valor de la variable independiente, calcular el valor de la dependiente); o en su carácter estrictamente formal: reconocimiento de expresión simbólica, y gráfica, muestra de ello son los siguientes argumentos:

... por función exponencial estas funciones decrecen, pues la base está entre 0 y 1
... no tocan el eje x nunca porque es asíntota...
... el methaxoine decrece cuando la hora aumenta, aplicando función exponencial vemos que este caso se cumple.
... son típicas de la función con base entre 0 y 1, luego son decrecientes, cuando t = o horas, el paciente no sufre ningún efecto, por tal razón a=1 y el punto de corte con el eje y es (0,1).

Es, pues, necesario trabajar la extensión de las álgebras al campo de los sistemas científicos, sociales y culturales, pues estos desarrollan el significado abstracto de variable, al igual que la comprensión semántica de letras y modelos de funciones. Estas consideraciones nos llevan a confirmar que no es adecuado para el desarrollo del



álgebra el énfasis restringido de enseñar álgebra numérica como cadena de tautologías (casos de factorización), técnicas sofisticadas (trucos) de procedimientos y fórmulas para resolver problemas de carácter estrictamente algebraico.

Aspectos didácticos

La integración a la enseñanza de los errores, puede llevarse a cabo, como lo propone Bell (1986) a través de tareas en las cuales se exponen conceptos y procedimientos correctos y equivocados con la finalidad de producir conflictos de carácter cognitivo. Esto supone al profesor, investigar áreas del conocimiento matemático susceptibles de errores, así como el diseño de tareas correspondientes. Pero en nuestro caso, además de ser utilizados como diagnóstico los errores han sido incorporados en el aula para socializarlos con el fin de provocar en los estudiantes explicaciones en las cuales se dote de sentido los errores. En el inicio del curso, los estudiantes son renuentes a socializar errores, pues sus historias de aprendizaje de las matemáticas les ha mostrado que se participa "cuando se sabe lo que el maestro sabe" y cuando no se cumple con esta regla, se debe guardar silencio; jornadas de discusión e inclusive de solicitar participar para argumentar y comprender el porqué de sus razones no es válido, se realizan en clase. Actitudes como la cooperación para ayudar al compañero a entender y corregir sus errores son igualmente desarrolladas.

El tratamiento didáctico y la característica de la asignatura y de los estudiantes (por lo menos, 13 años de historia de aprendizaje), nos presenta serios problemas, entre ellos, la "demora" en el cumplimiento de los contenidos pues la asignatura tiene el propósito de preparar para Cálculo 1. Esta situación implicaría rehacer conocimientos, pues en otros dominios matemáticos la situación es mucho más crítica (especialmente en Sistemas numéricos y pensamiento proporcional). Pero quizá la parte más sobresaliente de este estudio es identificar el aislamiento en que ha caído el aprendizaje de las matemáticas. Y a este respecto queremos hacer un llamado a todos los profesores tanto de secundaria como los encargados de la formación de profesores de matemáticas puesto que la escisión produce serios problemas no sólo de formación científica sino en el valor de las matemáticas como herramienta cultural❑

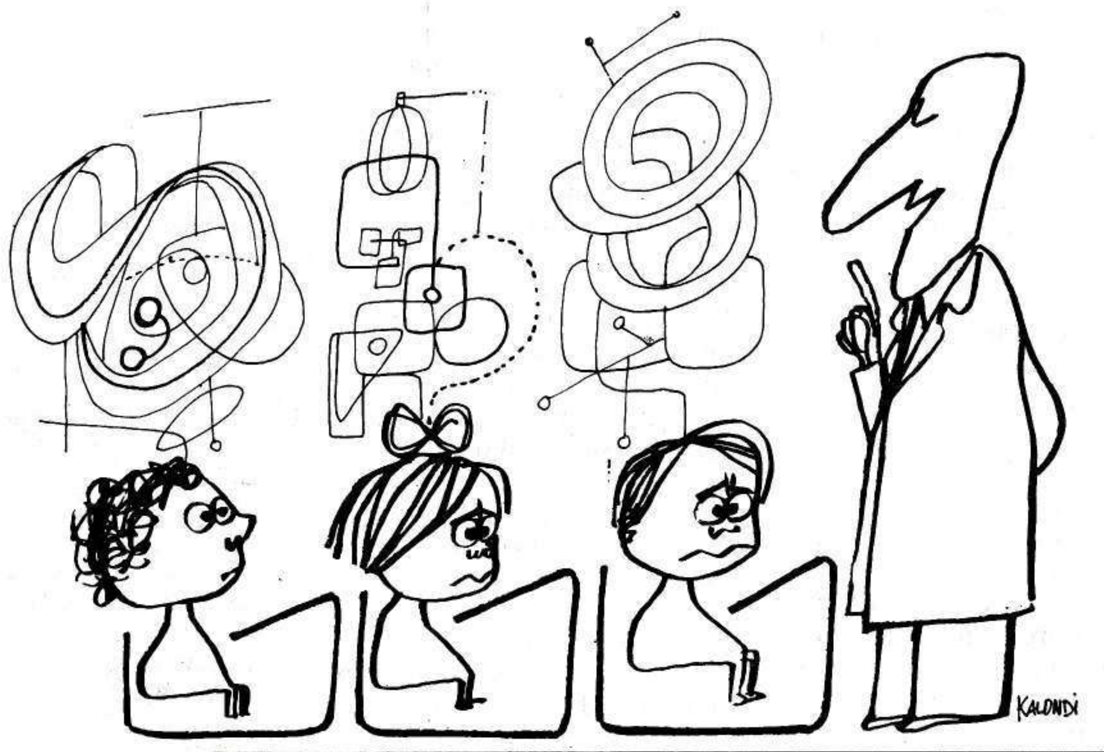
Bibliografía

Rico L., Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemática, Club Σ MAL, Universidad de los Andes, Bogotá, 1993.

Wagner S., Kieran C. (Editores), *Research Issues in the learning and teaching of Algebra.* Lawrence Erlbaum Associates, National Council of teachers of Mathematics E.E.U.U., 1989.

García G., Camargo L, La enseñanza de las matemáticas en las Ciencias, *Revista Cintex* No. 5, Instituto Tecnológico Pascual Bravo, Medellín, 1995 (en prensa).

Vasco C. E. *En Marco General. Matemáticas, Propuesta Curricular, Octavo Grado, Educación Básica Secundaria,* Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, 1990.



Reseña de un proyecto de la Localidad de Engativá

Reencuentro con la matemática

Mery Aurora Poveda -María Cristina Garzón -Nydia Ordóñez

Miembros del Equipo Coordinador

Antecedentes

El Proyecto surge como respuesta a la preocupación por los altos índices de mortalidad académica que en la zona se presentaban en el área de la matemática, especialmente en el grado sexto. Según una evaluación hecha por maestros de quinto y sexto de la zona 10E a los alumnos que terminaban quinto en 1990, se encontró que la mayoría presentaban dificultades en el manejo de los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas y en la comprensión y resolución de problemas elementales que implicaban combinar dos de las cuatro operaciones.

Se toma entonces la decisión de adelantar un Proyecto que muestre una forma alternativa de enseñar la matemática y para ello se decide implementar el método Descubro la Matemática[1], del que, en parte, tenían conocimiento algunos profesores de la zona que habían participado en cursos de capacitación que el autor, Jorge Castaño, dictaba des-

[1] Autoría del Asesor Pedagógico del Proyecto. El Método Descubro la Matemática surge principalmente de la experiencia de innovación pedagógica que se implementa en el Colegio Champagnat de Bogotá desde 1985 y del intercambio permanente que el autor ha tenido con los docentes, en las diferentes acciones de capacitación.

de la DIE-CEP. El trabajo se inició en los primeros meses de 1991 con los niveles de preescolar y primero de escuelas de las zonas 10E y 12, jornada mañana. Cada año, y después de una evaluación adelantada por profesores y directivos que participan en el proyecto, se avanza al curso inmediatamente superior. Actualmente la experiencia se desarrolla hasta el curso 5º, en las escuelas Garcés 1 y 3; Av. Chile la adelanta en primero y segundo, República de China y Garcés 2 Bachué, Primavera Norte, Guillermo León Valencia y Panamericana iniciaron pero se retiraron, por último el Centro Fe y Alegría del sector (Garcés 4) se vinculó a partir de 1993 y en el momento cubre los niveles primero, segundo y tercero.

Propósito

Propiciar en la escuela una revisión crítica de las prác ticas tradicionales, que dé lugar a otras comprensiones y actuaciones de los maestros, nuevas expectativas y demandas de padres de familia y niños, a través de la implementación de una propuesta didáctica basada en los postulados del constructivismo, con el fin de posibilitar la construcción de propuestas alternativas para la enseñanza de la matemática, validadas en la experiencia.

Fundamentación teórica

El proyecto está concebido en general desde una pers pectiva constructivista del aprendizaje cuyos presupuestos teóricos podríamos resumir así:

Todas las personas poseen estructuras mentales a través de las cuales explican el mundo que les rodea y todo lo que percibe a través de los sentidos está determinado por la lógica que gobierna dichas estructuras; todo lo que se ve, se oye y se siente, depende de lo que se sabe y de la forma como está organizado el pensamiento.

Así, las informaciones que le llegan al alumno son resignificadas por éste en función de las estructuras conceptuales que maneja, de tal forma que lo que el maestro presenta no siempre es percibido de la misma forma por el alumno.

Las estructuras conceptuales no son estáticas; se van modificando, ampliando y complejizando a medida que se interactúa con la realidad y ante la presentación de contradicciones o conflictos cognitivos que se producen cuando la estructura conceptual que se posee no logra dar cuenta de la realidad.

Desde luego, este proceso de reorganización interna no se produce espontáneamente sino que sólo es posible gracias a que el individuo interactúa con el objeto a conocer y con otros individuos[2].

El trabajo en el aula

La organización del trabajo en el aula está atravesada por las siguientes estrategias pedagógicas:

Situaciones significativas

Son situaciones que impulsan a los niños a la actuación colectiva o individual, porque les ofrece retos, los problematiza y les crea necesidades en las que hay un interés grupal o individual por satisfacerlas. Ellas son desencadenantes de múltiples intereses y acciones, llenas de pleno sentido. Allí, dentro de una globalidad, el niño encuentra significados que en contextos menos reales le serían imposibles, ensaya y experimenta desde sus hipótesis, verifica en el mismo contexto su validez, a la vez que confronta o es confrontado por sus iguales.

Las hay de dos tipos: Inestructuradas y estructuradas. Las primeras, más orientadas a recuperar los saberes de los niños y a construir un profundo significado de las relaciones y operaciones involucradas en los sistemas conceptuales matemáticos; dentro de éstas cobran importancia las situaciones y juegos cotidianos (tiendas, lecherías, el transporte, el juego la rana, cinco huecos, etc.). Las segundas, son situaciones menos amplias que las anteriores, que buscan que el niño repita, una y otra vez, ciertas acciones que faciliten la diferenciación y la toma de conciencia.

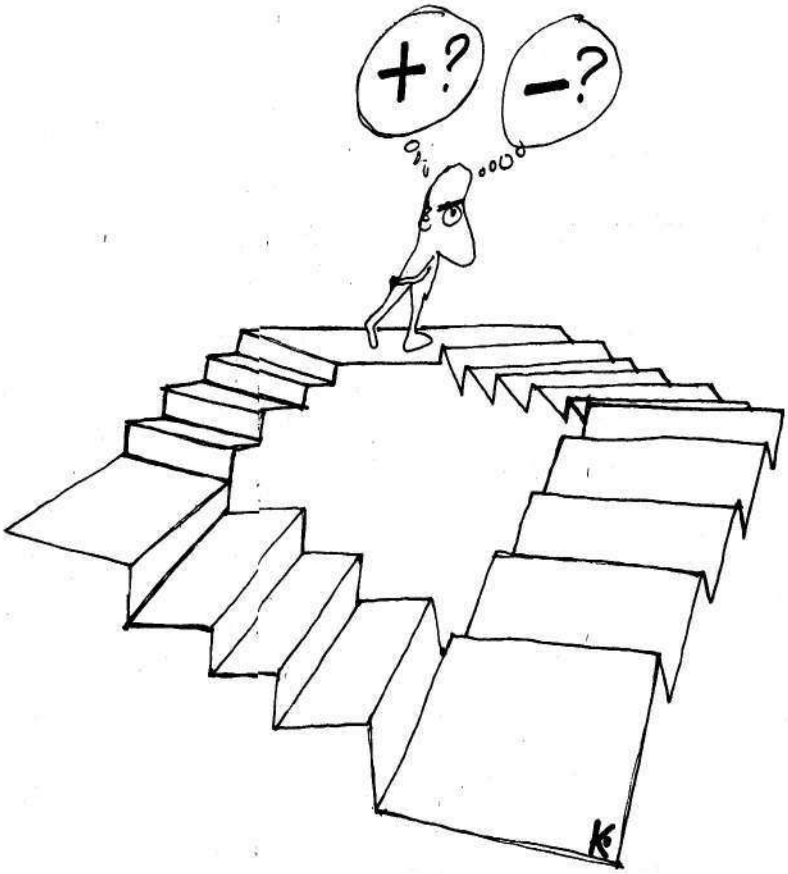
Siendo el juego un elemento esencial de la vida de los niños, las situaciones estructuradas se organizan alrededor de juegos con reglas más o menos definidas, pero no es el juego simplemente recreativo el que se utiliza como estrategia sino aquel que se estructura intencionalmente para exigir al alumno la solución de una determinada clase de problemas que conducen a la construcción de un concepto matemático determinado.

El juego se diseña de tal forma que sea comprensible para los niños en tanto tiene en cuenta las elaboraciones conceptuales a las cuales ya han accedido, pero al mismo tiempo introduce niveles de dificultad y reto que jalonen el pensamiento del niño.

Así por ejemplo, para aquellos niños que ya empiezan a tener algún nivel de dominio con la correspondencia uno a uno con los objetos, se les presenta un juego

[2] Una mirada más amplia de los principios que fundamentan la propuesta que se encuentra en el documento escrito por Jorge Castaño y que aparece en este mismo número de la revista.

que les exija la correspondencia uno a uno pero ya no con los objetos directamente, sino gráficamente (juego de cartas de niños y patinetas) y luego, cuando se empiece a ver cierto dominio en este nivel de correspondencia gráfica, se les da a conocer un juego que implique la correspondencia a nivel más simbólico (comparación de puntos) y hasta finalmente llegar a un juego que implica el manejo de los signos numéricos.



Desde luego, como en todos los juegos, se busca que haya una meta a alcanzar y además que tenga un alto grado de azar para que las oportunidades de ganar sean una permanente sorpresa y de esta forma mantener el reto hasta el final. Además se busca que las reglas puedan ser administradas autónomamente por los niños sin la dependencia del maestro.

Otro aspecto importante que se tiene en cuenta es el de tener como integrantes de 2 a 4 niños como máximo para cada juego y poder de esta forma garantizar la participación directa de cada uno en un lapso de tiempo mínimo.

Interacciones entre los niños

La organización de los grupos o pares de juego o de trabajo no siempre se deja a la libre elección de los niños ya que en algunas ocasiones se busca privilegiar una forma particular de interacción de acuerdo las características y al proceso de los niños.

Así por ejemplo, en unas ocasiones puede ser importante que interactúen niños que tienen niveles de conceptualización similares ya que se privilegia el diálogo entre iguales; en otras puede ser más productivo que un niño de un nivel avanzado juegue con un niño de nivel menos avanzado para que con su ayuda pueda ver otras formas de enfrentar las situaciones; puede suceder también que sea poco provechoso permitir que un niño sobreprotector o poco paciente juegue con otro de un nivel menos avanzado; además, pueden existir ocasiones en que lo más importante no es el juego en sí mismo, sino el tipo de relación afectiva que se establece entre los niños porque existen condiciones socioafectivas que están bloqueando el proceso, etc.

De todas maneras se es consciente de que la organización de los niños alrededor de un juego o de un trabajo en grupo hace que cada uno intente comprender la perspectiva del otro para poder argumentar y contraargumentar lo que le plantea; la exigencia de escuchar y ser escuchado y el establecimiento de reglas y su cumplimiento empiezan a ser importantes; la capacidad de dirigir y aceptar ser dirigidos se ejercita. En pocas palabras, a través del trabajo en equipo los niños van desarrollando su pensamiento social.

Además del trabajo en grupos pequeños, se tienen momentos de encuentro del curso en donde cada quien expone y argumenta sus formas particulares de proceder ante una determinada situación problemática. En estas plenarias se evidencia y se pone de relieve la diversidad en formas de abordar un mismo problema y los ritmos particulares en el proceso; además se valoran los procedimientos utilizados se permite a cada uno optar por el que le resulte más comprensible y eficiente, se le impulsa a comprender y practicar los procedimientos de otros.

Las **figuras 1 y 2** ilustran el caso de un niño que aborda en un primer momento un problema utilizando un sistema de representación gráfica y luego de una puesta en común de los procedimientos utilizados por otros, aborda un segundo problema utilizando un sistema de representación más simbólico.

Ejercicio 1

Con 1 billete de $1.000 hay qué pagar $536. Cómo hace para pagar? Muestre en el cuaderno cómo lo pagaría:

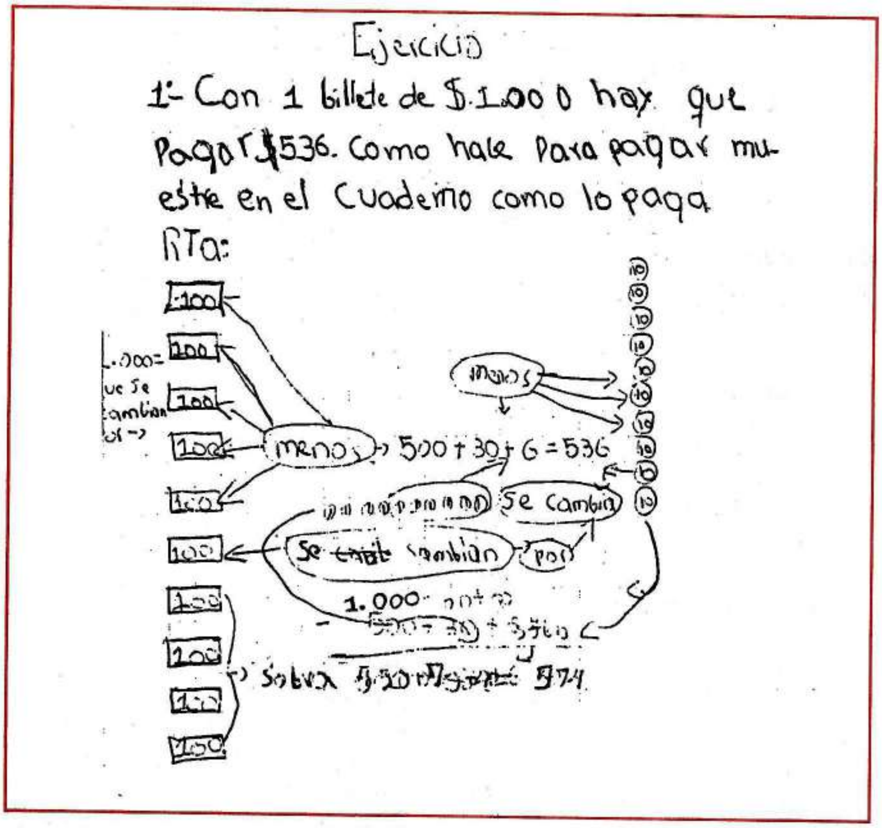


Figura 1 Representación utilizada antes de la Plenaria

El billete de 1000 lo cambia por 10 billetes de 100, de ahí saca los 500 y uno de los billetes de 100 que sobran lo cambia por 10 de 10 y de ahí los 30, uno de los billetes de 10 que sobran lo cambia por 10 de a peso y de ahí saca los 6 pesos, luego cuenta todos los billetes que le sobran (454).
Sebastián, 9 años , 3º de Primaria

Ejercicio 2

Con 1 billete de $1.000 hay qué pagar $692. Cómo hace para pagar y cuánto sobra?

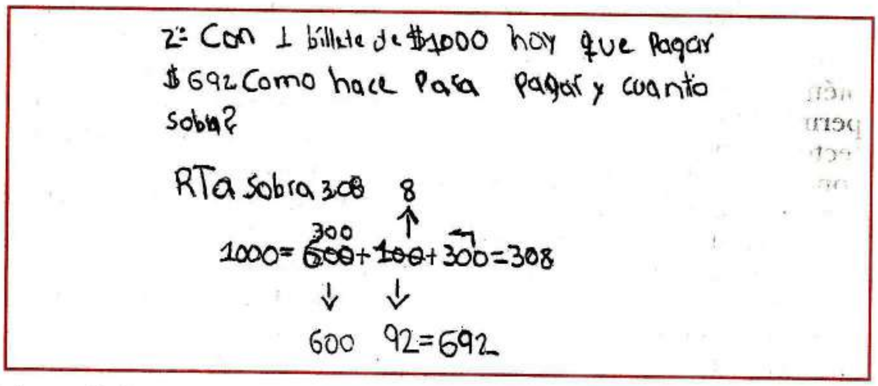


Figura 2. Representación después de la plenaria.

Los mil pesos los cambia por 600, 100 y 300 (anticipando los pagos). Toma los 600 para el pago y de los 100 paga 92 y le quedan 8. Luego toma los 300 que le están sobrando y los coloca al iniciar para ordenar las cantidades y entonces reúne las cantidades que le sobran (308).

En este proceso el maestro confronta las posiciones de los niños presentándoles situaciones que los desestabilicen y así obligarlos a argumentar sus propias elaboraciones y defenderlas o cambiarlas en un momento dado.

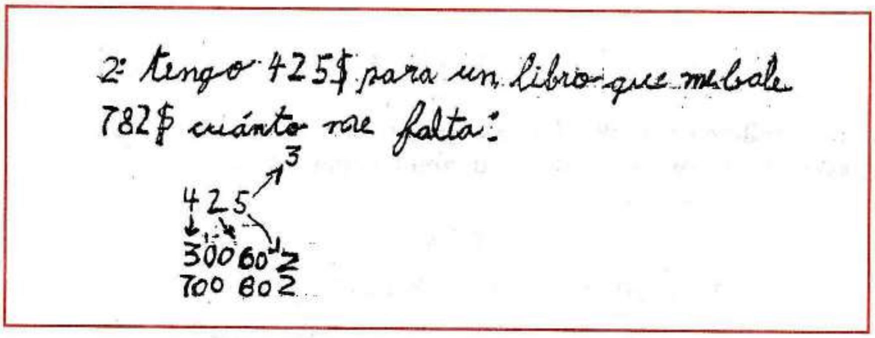
Para el caso del niño ilustrado en la fig. 3, por ejemplo, quien señala que le faltan $ 362 para el libro, pero que le sobran $ 3, la maestra lo interpeló con las siguientes preguntas:

m: a 5 le faltan 2 para completar 2? (Señalándole la flecha de la derecha).
n: No! De los 5 saco los 2 y entonces me sobran 3.
m: Al fin en qué quedamos: en que le sobran o en que le faltan para el libro?
n: Le falta
m: Y no me acaba de decir que le sobran 3?
n: Es que le faltan 360 y le sobran 3
m: Puede sobrarle y al mismo tiempo faltarle?
n: No, pero no sé qué hacer con lo que sobra.

Se podría decir que el niño trabaja como sistemas independientes las centenas, las decenas y las unidades y cuando trata de integrarlos para dar cuenta de la pregunta, se le genera una situación conflictiva, que reconoce como tal, pero que no es capaz de resolver por sí solo.

En este caso la maestra podría: remitirlo con un niño un poco más avanzado para que observe los procedimientos; plantearle la misma situación con un nivel de representación más ligado a lo concreto como con billetes de 100, 10 y 1 o plantearle la misma situación con un círculo numérico más pequeño. No tendría sentido explicarle varias veces para que mecanizara el procedimiento a seguir pues con ello se lograría un adiestramiento, pero el niño, al no tener la estructura necesaria para ver o comprender las implicaciones lógicas de la situación que se le plantea, no sería dueño de ese conocimiento.

Figura 3 (Conflicto)
Tengo $425 para un libro que me vale $782 ¿Cuánto me falta?



Felipe, 9 años, 3º de Primaria

La toma de conciencia

El poder que tiene un determinado conocimiento para una persona está directamente relacionado con el nivel de conciencia que posee sobre dicho conocimiento; la experiencia nos ha mostrado que los niveles de conciencia respecto de un determinado conocimiento se manifiestan en: el saber hacer, el poder comunicar verbalmente lo que se sabe hacer y el poder representar lo que sabe para comunicarlo en condiciones no inmediatas. Para el caso de las matemáticas el grado más alto de conciencia vendría dado entonces por el uso del lenguaje matemático como instrumento para expresar y comunicar lo que se sabe sobre un problema determinado.

Es por ello que además del enfrentamiento a la situación problemática propuesta por el juego o por el trabajo en grupo, se exige que cada vez se explicite en forma más precisa lo que se piensa y se plantea la necesidad de representar por escrito los procedimientos utilizados en la resolución de un problema determinado. Las figuras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 muestran diversas formas de representación utilizadas por los niños en la expresión y comunicación de sus procedimientos: (Ver página siguiente)

Interacciones entre docentes

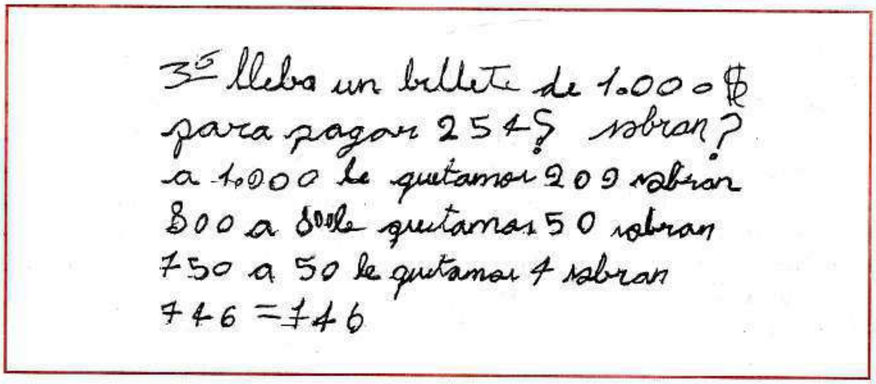
A lo largo del desarrollo del proyecto se realizan jornadas de formación docente cuyo propósito ha sido el de ofrecer los fundamentos conceptuales y metodológicos para implementar la propuesta y analizar lo sucedido durante su implementación. En un comienzo estos talleres fueron dirigidos por el Asesor Pedagógico y paulatinamente las ha ido asumiendo un equipo integrado por aquellos docentes que se han involucrado más en el proceso y que han ido creciendo durante los 5 años de desarrollo del proyecto.

Las jornadas pedagógicas se estructuran con relación a los siguientes ejes principales:

- Profundización teórica que fundamenta el quehacer del docente.
- Análisis y socialización de las experiencias donde se presentan sugerencias para avanzar en el trabajo específico del aula.
- Evaluación del trabajo realizado para retroalimentar el proceso y tomar las decisiones pertinentes para su continuidad.

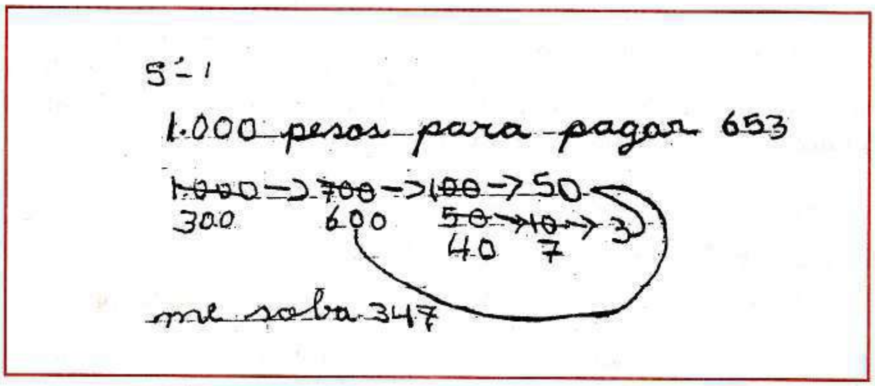
Figura 4
Representación ligada al lenguaje escrito

Lleva un billete de $1.000 para pagar 254 ¿Cuánto le sobra? A $1.000 le quitamos $200 sobran $800 a $800 le quitamos $50 sobran $750 a 50 le quitamos 4 sobran $746 = 746.


3º llebo un billete de 1.000 $
para pagar 254 $ sobran?
a 1.000 le quitamos 200 sobran
800 a 800 le quitamos 50 sobran
750 a 50 le quitamos 4 sobran
746 = 746

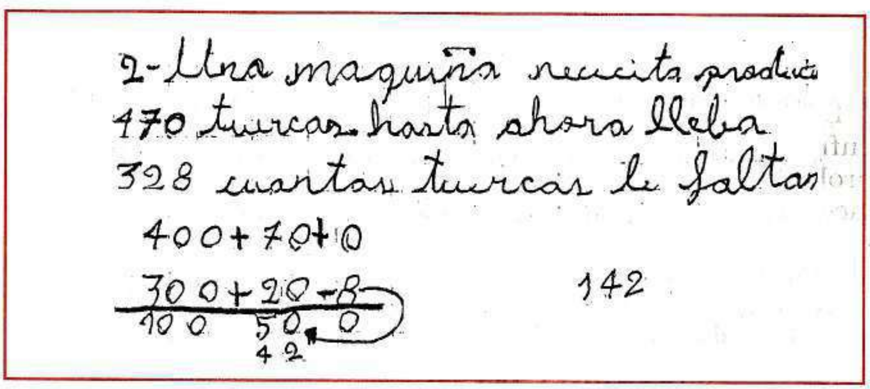
El procedimiento es narrado a través del lenguaje escrito.
Emanuel, 8 años, 3º de Primaria

Figura5
Representación simbólica


5-1
1.000 pesos para pagar 653
~~1.000~~ → ~~700~~ → ~~100~~ → 50
300 600 ~~50~~ → ~~10~~ → 3
40 7
me soba 347

De los 1000 saca 700 para pagar los 653 y quedan 300, de los 700 saca 600 y quedan 100, de éstos toma 50 y quedan 50, de los 50 que quedan saca 10 y quedan 40, de los 10 que sacó toma 3 que hay que pagar y quedan 7. Al final con una flecha une lo que pagó y reúne lo que le queda: 347.
Carolina, 8 años, 3º de Primaria

Figura 6
Utilización de un lenguaje más cercano al matemático


2- Una maquina necsita produci
470 turcas hasta ahora lleba
328 cuantas turcas le faltan
400+70+0
300+20+8 142
100 50 0
42

A 300 le faltan 100 para 400; a 20 le faltan 50 para 70; sobran los 8 luego no faltarían 50 como se pensaba sino 42 porque ya se tienen 8.
Emanuel, 8 años, 3º de Primaria

Una máquina necesita producir 470 tuercas , hasta ahora lleva 328. ¿Cuántas tuercas le faltan?

La propuesta ha generado los conflictos y las resistencias propias de este tipo de trabajo: los procesos y las producciones de los niños se juzgan desde los resultados esperados con la metodología tradicional poniendo en tela de juicio su eficacia. Además la limitada apropiación de la propuesta crea inseguridad y angustia al ser conscientes de que la forma de trabajo tradicional ya no llena las expectativas que se van creando.

Es por ello que se ve la necesidad de realizar estas jornadas mínimo una vez al mes para garantizar el acompañamiento y seguimiento pero no se cuenta con el apoyo institucional y financiero para hacerlo, por lo que los niveles de angustia aumentan.

Logros

Para los maestros que han participado en forma con tinua en la experiencia ha significado el paso a una forma distinta de concebir su papel en la enseñanza, de mirar los niños y a la matemática; no sólo han reapren- dido las matemáticas sino que empie-zan a encontrarle un nuevo sentido a su quehacer como docentes.

En los niños se evidencia el desarrollo de la capacidad de argumentación frente a los problemas que se le platean, el nivel de control y la tenacidad con que enfrentan las situaciones, el desarrollo paulatino de la capacidad de trabajo en equipo, la capacidad para ir integrando las informaciones que poseen a los análisis que realizan y, sobre todo, una relación muy afectiva con ese objeto de conocimiento que es la matemática.

Dificultades

Podríamos señalar como principales dificultades las siguientes:

• La falta de financiación y apoyo institucional decidido que perjudica el nivel de seguimiento y asesoría, así como la disposición de materiales de calidad y en forma oportuna.

• La ocupación total del tiempo laboral del docente en el trabajo con los niños que hace que sea muy difícil contar con los espacios de reflexión necesarios.

• La falta de equilibrio entre cobertura y calidad de las políticas educativas obliga a las instituciones a recibir 40 o más niños por grado, deteriorando de esta manera el acompañamiento y las interacciones que se propician en el aula.

• La presión creada por los directivos, maestros y padres que no participan en la propuesta, que no entienden la trascendencia de la misma, que buscan resultados inmediatistas y que al no comprenderla, la juzgan desde la mirada de la enseñanza tradicional❑